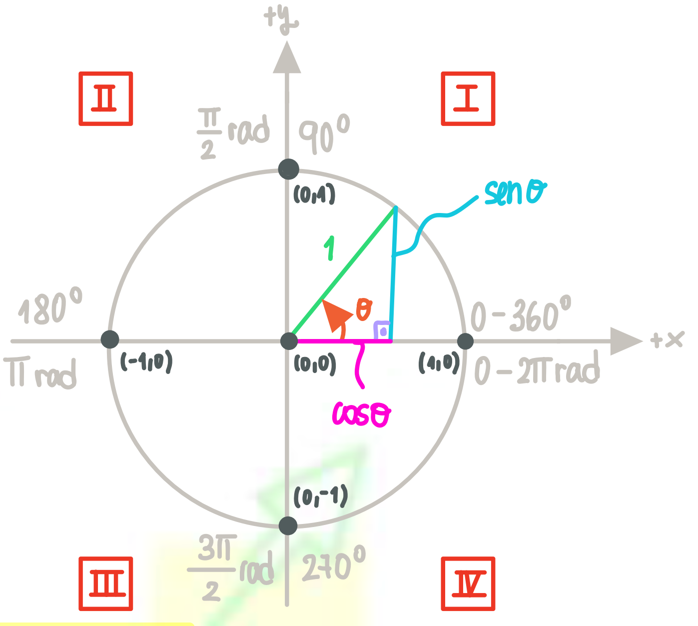
info@tuacademiafacil.com

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie de términos no negativos convergente. Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^3(\pi n) b_n$.



1º $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^3(\pi \cdot n) \cdot b_n$

2º Términos de $\{a_n\}$:

$n=1: \ a_1 = \operatorname{sen}^3(\pi) \cdot b_1 = 0 \cdot b_1 = 0$

$n=2: \ a_2 = \operatorname{sen}^3(2\pi) \cdot b_2 = 0 \cdot b_2 = 0$

$n=3: \ a_3 = \operatorname{sen}^3(3\pi) \cdot b_3 = 0 \cdot b_3 = 0$

por tanto, $\{a_n\} = \{0, 0, 0, \cdots, 0\}$

3º $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0+0+0+\cdots+0 = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

4º Aplicando el criterio de comparación (directa):

Como $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

$0 \leq 0 \leq \boxed{b_1}$

$0 \leq 0 \leq \boxed{b_2}$

$b_n \geq 0$

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

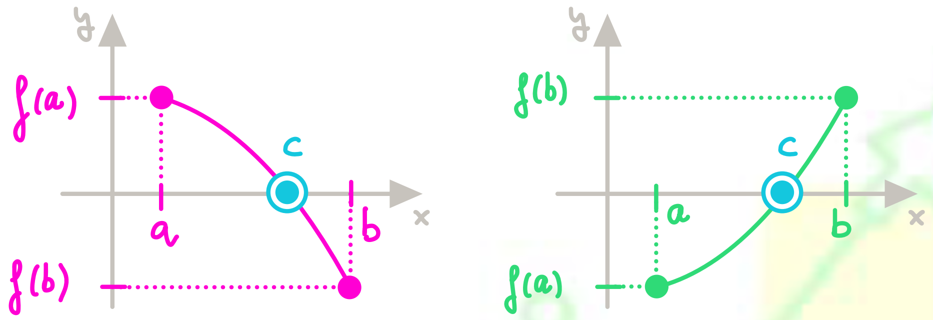
PREGUNTAS CORTAS

2. (1 PUNTO) (a) Enuncie el Teorema de Bolzano.

   (b) Demuestre que la ecuación $x^5 + x^3 - 5 = 0$ tiene una <u>única</u> solución en el intervalo $[1, 2]$.

(a) 1º Teorema de Bolzano:

$$\left.\begin{array}{l} ①\ f \text{ CONTINUA en } [a,b] \\ ②\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \exists c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$$



(b) 2º Aplicación del T. de Bolzano a $f(x) = x^5 + x^3 - 5$ en $[1,2]$.

$$\left.\begin{array}{l} ①\ f \text{ } \underline{\text{CONT.}} \text{ en } [1,2] \text{ por ser polinómica.} \\ ②\ f(1) = (1)^5 + (1)^3 - 5 = 2 - 5 = -3 < 0 \\ \quad f(2) = (2)^5 + (2)^3 - 5 = 40 - 5 = 35 > 0 \end{array}\right\} \exists c \in (1,2) \,/\, f(c) = 0$$

3º Con el T. de Bolzano se tiene que la función corta al eje OX en $[1,2]$ en al menos un punto. Para que éste sea único, se debe comprobar que $f(x)$ no tiene un extremo en $(1,2)$ y/o $f(x)$ crece o decrece en todo el intervalo.

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

$f(x) = x^5 + x^3 - 5$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$

PTOS. ESTUDIO ¿EXTREMOS?

$f'(x) = 0$

$5x^4 + 3x^2 = 0$

$x^2(5x^2+3) = 0$

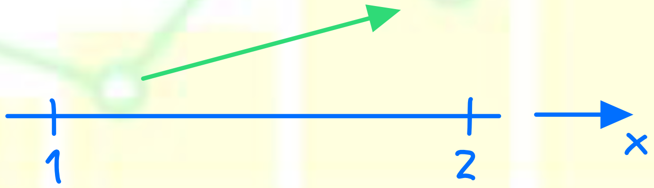
$x_1 = x_2 = 0$

$5x^2 + 3 = 0$

$\cancel{5x^2 = -3}$ NO SOL.

4º El único posible extremo está en $x = 0 \notin [1,2]$, por tanto, el valor de c será único en el intervalo $[1,2]$.

5º COMPROBACIÓN:



$f'(1'5) = 5 \cdot (1'5)^4 + 3 \cdot (1'5)^2 > 0$

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

PREGUNTAS CORTAS

3. (1 PUNTO) Determine la dirección de mínimo crecimiento de la función $f(x,y) = e^{x^2y} - \frac{1}{x}$ en el punto $(1,1)$.

1º $\nabla f(x,y) = \left(2xy \cdot e^{x^2y} + \frac{1}{x^2},\ x^2 \cdot e^{x^2y}\right)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \cdot e^{x^2y} + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \cdot e^{x^2y}$$

2º $\nabla f(1,1) = (2 \cdot e + 1,\ e)$

3º La dirección de mínimo crecimiento es la opuesta al gradiente:

$$-\nabla f(1,1) = (-2e-1,\ -e)$$

4º Si se quiere dar el vector unitario de la dirección de mínimo crecimiento:

$$\|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{(2e+1)^2 + e^2} = \sqrt{4e^2 + 1 + 4e + e^2} = \sqrt{5e^2 + 4e + 1}$$

$$-\frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = \left(\frac{-2e-1}{\sqrt{5e^2+4e+1}},\ \frac{-e}{\sqrt{5e^2+4e+1}}\right)$$

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

PREGUNTAS CORTAS

4. (1 PUNTO) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función positiva. Se aproxima el área delimitada por la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[1,2]$ utilizando diferentes métodos y se conoce la siguiente información:

   - Utilizando la fórmula de los rectángulos (con altura dada por el valor de la función en el extremo superior del intervalo), el valor aproximado del área es 3.
   - Utilizando la fórmula de los trapecios, el valor aproximado del área es 4.
   - Utilizando la fórmula de Simpson, el valor aproximado del área es 4.

   Obtenga el valor de $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

1º $A = \int_a^b f(x)dx = f(b)\cdot(b-a)$

$A = \int_1^2 f(x)dx = f(2)\cdot(2-1) = \boxed{f(2)=3}$

2º $A = \int_a^b f(x)dx = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$

$A = \int_1^2 f(x)dx = \dfrac{f(1)+f(2)}{2}\cdot(2-1) = \dfrac{f(1)+3}{2} = 4 \rightarrow \boxed{f(1)=5}$

3º $A = \int_1^2 f(x)dx = \dfrac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}\cdot(b-a)$

$A = \int_1^2 f(x)dx = \dfrac{f(1)+4f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)}{6}\cdot(2-1) = \dfrac{5+4f\left(\frac{3}{2}\right)+3}{6} = 4$

$4f\left(\frac{3}{2}\right)+8 = 24$

$4f\left(\frac{3}{2}\right) = 16$

$\boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) = 4}$

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Los datos que toma una función f en cuatro nodos diferentes se muestran en la siguiente tabla:

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
$f(x_k)$	0	0,69	1,1	1,39

$K=0,\ x_0=1,\ f(x_0)=f(1)=0$

$K=1,\ x_1=2,\ f(x_1)=f(2)=0'69$

$K=2,\ x_2=3,\ f(x_2)=f(3)=1'1$

$K=3,\ x_3=4,\ f(x_3)=f(4)=1'39$

(a) Determine el polinomio de grado 3 que interpola los datos de la tabla mediante

(a.1) (0.75 PUNTOS) el método de las diferencias divididas de Newton

(a.2) (0.75 PUNTOS) la forma de Lagrange.

(b) Se sabe que los datos de la tabla anterior se corresponden con los valores de la función $f(x) = \ln(x)$ redondeados a la segunda cifra decimal. Se pide lo siguiente:

(b.1) (0.75 PUNTOS) Determine el polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en $x = 2$.

(b.2) (0.75 PUNTOS) Obtenga un valor aproximado de $f(2,5)$ con dos cifras decimales a partir del polinomio interpolador del apartado (a) y otro valor aproximado a partir del polinomio de Taylor calculado.

(a.1) 1º Método de las diferencias divididas de Newton:

$$P_3(x)=f[x_0]+\boxed{f[x_0,x_1]}(x-x_0)+\boxed{f[x_0,x_1,x_2]}(x-x_0)(x-x_1)+\boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

2º Recopilación de datos:

K	x_K	$f(x_K)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0	1	0			
			$\boxed{0'69}$		
1	2	0'69		$\boxed{-0'14}$	
			0'41		$\boxed{0'027}$
2	3	1'1		$-0'06$	
			0'29		
3	4	1'39			

$$f[x_0,x_1]=\frac{0'69-0}{2-1}=0'69 \qquad f[x_1,x_2]=\frac{1'1-0'69}{3-2}=0'41$$

$$f[x_2,x_3]=\frac{1'39-1'1}{4-3}=0'29 \qquad f[x_0,x_1,x_2]=\frac{0'41-0'69}{3-1}=-0'14$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{0'29-0'41}{4-2}=-0'06 \qquad f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{-0'06-(-0'14)}{4-1}=0'027$$

info@tuacademiafacil.com

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

3º $P_3(x) = 0 + \boxed{0'69} \cdot (x-1) - \boxed{0'14} \cdot (x-1)(x-2) + \boxed{0'027} \cdot (x-1)(x-2)(x-3) =$

$= 0'69(x-1) - 0'14(x^2-3x+2) + 0'027 \cdot (x^2-3x+2)(x-3) =$

$= 0'69(x-1) - 0'14(x^2-3x+2) + 0'027(x^3-6x^2+11x-6) =$

$= 0'027x^3 - 0'302x^2 + 1'407x - 1'132$

(a.2) 4º Método de Lagrange:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \cdot L_i(x) \quad \text{donde} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j \neq 1}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

entonces

$$P_3(x) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + f(x_2) \cdot L_2(x) + f(x_3) \cdot L_3(x)$$

5º Recopilación de datos:

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \frac{x-x_3}{x_0-x_3} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{x^3-7x^2+14x-8}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}$$

6º $P_3(x) = 0 + 0'69 \dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{2} - 1'1 \dfrac{x^3-7x^2+14x-8}{2} +$

$+ 1'39 \dfrac{x^3-6x^2+14x-8}{6} = 0'027x^3 - 0'3x^2 + 1'403x - 1'13$

(b.1) 7º Polinomio de Taylor de grado 3:

$$P_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

8º Recopilación de datos:

$f(x) = \ln(x) \longrightarrow f(2) = \ln(2)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \longrightarrow f'(2) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} \longrightarrow f''(2) = \dfrac{-1}{4}$

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} \longrightarrow f'''(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

9º $P_3(x) = f(2) + f'(2)\cdot(x-2) + \dfrac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \dfrac{f'''(2)}{6}(x-2)^3 =$

$= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3$

(b.2) 10º (a) $P_3(2'5) = 0'027(2'5)^3 - 0'302(2'5)^2 + 1'407(2'5) - 1'132 = 0'92$

(b) $P_3(2'5) = \ln(2) + 1/2\,(0'5) - 1/8\,(0'5)^2 + 1/24\,(0'5)^3 = 0'92$

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

EJERCICIOS

6. (3 PUNTOS) Sea $f(x,y) = x\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 2xy + 4x - 4$.

   (a) (0.5 PUNTOS) Considere la ecuación $f(x,y) = 0$. Pruebe que esta ecuación define a y como función implícita de x, $y = g(x)$, en un entorno del punto $(1,0)$.

   (b) (1.25 PUNTOS) Para la función g del apartado anterior, calcule $g'(1)$.

   (c) (1.25 PUNTOS) Estudie si el punto $(0,2)$ es o no es un extremo relativo de la función f.

(a) 1º Teorema de la función implícita:

1. $f(1,0)=0 \longrightarrow f(1,0) = 1\cdot\text{sen}(0) - 0 + 4 - 4 = 4-4=0$ ✓

2. $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\neq 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\cdot\frac{\pi}{2} - 2x = \frac{\pi}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 2x$

   $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{\pi}{2}\cos(0) - 2 = \frac{\pi}{2} - 2 \neq 0$ ✓

por tanto, se cumple que $y = g(x)$ en el entorno de $(1,0)$.

(b) 2º

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 2y + 4}{\frac{\pi}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 2x}$$

$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)} = -\frac{\text{sen}(0) - 0 + 4}{\frac{\pi}{2}\cos(0) - 2} = \frac{4}{\frac{\pi}{2} - 2}$$

(b) 3º Cálculo de la $H_f(0,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 2y + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\cdot\frac{\pi}{2} - 2 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2) = -\frac{\pi}{2} - 2$$

Examen · Febrero 2024 · Semana 1

Cálculo · Ingeniería Mecánica · UNED

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi}{2} x \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) - 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right) - 2 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,2) = -\frac{\pi}{2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} y\right) \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2) = 0$$

por tanto,

$$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi/2 - 2 \\ -\pi/2 - 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi/2 - 2 \\ -\pi/2 - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = 0 - (-\pi/2 - 2)^2 = -(-1)^2(\pi/2 + 2)^2 = -(\pi/2 + 2)^2 < 0$$

y entonces, en $(0,2)$ hay un PUNTO DE SILLA, es decir, no hay un extremo relativo.