



## Ejercicios de autoevaluación

Determinése si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. El centro y el radio del intervalo  $[-1, 3]$  son 1 y 2 respectivamente.

R: Sección 1.1.

2. Todo el subconjunto acotado  $A$  de números reales verifica  $\sup A \in A$ .

R: Sección 1.1.

3. Una sucesión de números reales puede ser a la vez no convergente y acotada.

R: Sección 1.2.

4. Si converge  $\{|a_n|\}$ , entonces también converge  $\{a_n\}$ .

R: Sección 1.2.

5. Sabiendo que  $a_n \neq 0$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente, se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

R: Sección 1.3.

6. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} \frac{1}{n}$  es convergente por el criterio de Leibniz.

R: Sección 1.3.

7. Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $a$ , entonces es continua  $\frac{f}{g}$  en  $a$ .

R: Sección 1.4.

8. Sea  $f$  continua en el intervalo cerrado y acotado  $I$ . El método de la bisección puede aplicarse a la ecuación  $f(x) = 0$  en  $I$  siempre que existe un  $c \in I$  tal que  $f(c) = 0$ .

R: Sección 1.4.

9. La convergencia uniforme garantiza la convergencia puntual.

R: Sección 1.5.

10. Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ , entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es  $\frac{1}{3}$ .

R: Sección 1.5.





## Ejercicios de autoevaluación

Determinése si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. El centro y el radio del intervalo  $[-1, 3]$  son 1 y 2 respectivamente.

*Verdadera*

El centro del intervalo es el punto medio entre  $-1$  y  $3$ , es decir,  $1$ . El radio es la diferencia en valor absoluto entre un extremo y el centro, por tanto, el radio es  $2$ .

2. Todo el subconjunto acotado  $A$  de números reales verifica  $\sup A \in A$ .

*Verdadera*

El axioma del supremo establece que todo conjunto acotado superiormente tiene un supremo en  $\mathbb{R}$ .

3. Una sucesión de números reales puede ser a la vez no convergente y acotada.

*Verdadera*

La sucesión  $a_n = (-1)^n$  no converge y está acotada en  $[-1, 1]$  (Figura 1.6.1).

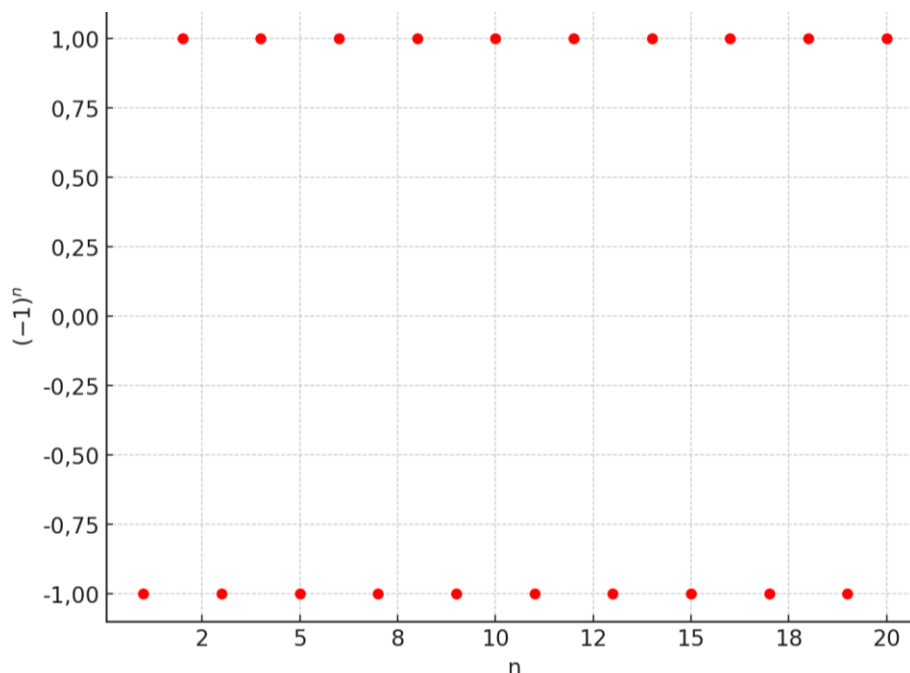


Figura 1.6.1. Representación gráfica de la sucesión  $a_n = (-1)^n$ .

4. Si converge  $\{|a_n|\}$ , entonces también converge  $\{a_n\}$ .

*Falsa*

La sucesión  $|a_n| = |(-1)^n|$  converge, pero  $a_n = (-1)^n$ .





5. Sabiendo que  $a_n \neq 0$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente, se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

Correcta

Si  $a_n$  converge entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = 1^{\infty} (\text{Indet.}) = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a_n-1) \frac{1}{a_n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n}} = e^1 = e.$$

6. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} \frac{1}{n}$  es convergente por el criterio de Leibniz.

Verdadera

Se trata de una serie alternada, ya que  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ , y además decreciente, pues  $\{|a_n|\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n\}$ , por tanto, como

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \right| = 0$ , la serie converge (Figura 1.6.2).

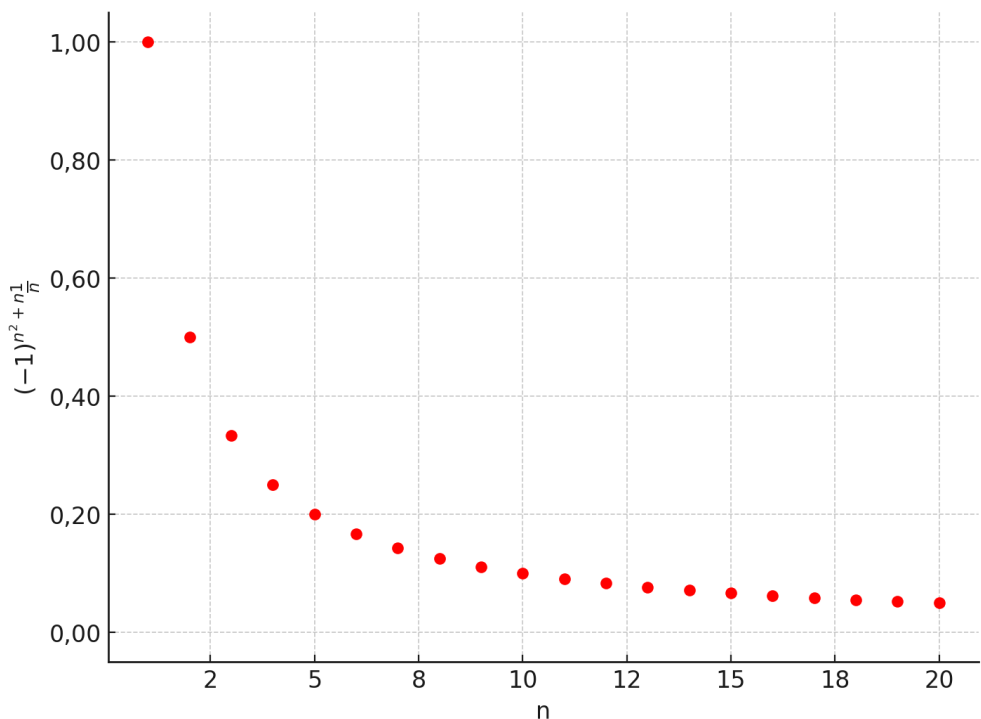


Figura 1.6.2. Representación gráfica de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} \frac{1}{n}$ .

7. Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $a$ , entonces es continua  $\frac{f}{g}$  en  $a$ .

Falsa

Debe cumplirse también que  $g \neq 0$ .





8. Sea  $f$  continua en el intervalo cerrado y acotado  $I$ . El método de la bisección puede aplicarse a la ecuación  $f(x) = 0$  en  $I$  siempre que existe un  $c \in I$  tal que  $f(c) = 0$ .

*Falsa*

Para aplicar el teorema de Bolzano, es decir, para exista un punto de corte entre  $f(x)$  y el eje  $OX$  que satisfaga la ecuación  $f(x) = 0$ ,  $f(x)$  debe ser continua en el intervalo  $I = [a, b]$  y además el producto de las imágenes de los extremos de  $I$  sea negativo:  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (Figura 1.6.3).

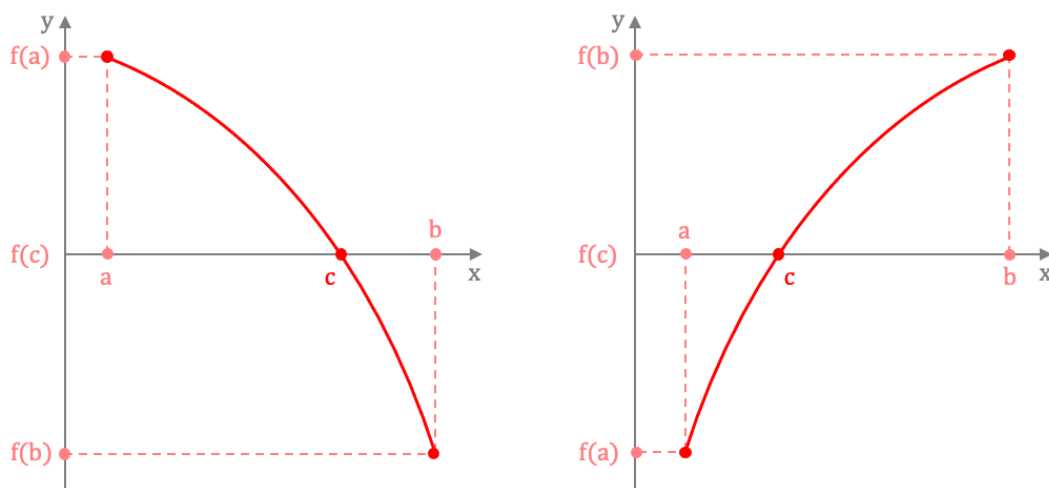


Figura 1.6.3. Representación gráfica del teorema de Bolzano para una función cualquiera.

9. La convergencia uniforme garantiza la convergencia puntual.

*Verdadera*

Si una sucesión de funciones  $f_n$  converge uniformemente a la función límite  $f$  en un intervalo determinado, entonces también converge puntualmente. Lo mismo ocurre en las series de funciones..

10. Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ , entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es  $\frac{1}{3}$ .

*Verdadera*

Por el criterio del cociente aplicado a series de potencias, el radio de curvatura es  $1/S$ , por tanto, como  $S = 3$ , el radio de convergencia es  $1/3$ .

