



Ejercicios de autoevaluación

Determinése si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. El centro y el radio del intervalo $[-1, 3]$ son 1 y 2 respectivamente.

R: Sección 1.1.

2. Todo el subconjunto acotado A de números reales verifica $\sup A \in A$.

R: Sección 1.1.

3. Una sucesión de números reales puede ser a la vez no convergente y acotada.

R: Sección 1.2.

4. Si converge $\{ |a_n| \}$, entonces también converge $\{ a_n \}$.

R: Sección 1.2.

5. Sabiendo que $a_n \neq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

R: Sección 1.3.

6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} \frac{1}{n}$ es convergente por el criterio de Leibniz.

R: Sección 1.3.

7. Si f y g son funciones continuas en a , entonces es continua $\frac{f}{g}$ en a .

R: Sección 1.4.

8. Sea f continua en el intervalo cerrado y acotado I . El método de la bisección puede aplicarse a la ecuación $f(x) = 0$ en I siempre que existe un $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.

R: Sección 1.4.

9. La convergencia uniforme garantiza la convergencia puntual.

R: Sección 1.5.

10. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es $\frac{1}{3}$.

R: Sección 1.5.





Ejercicios de autoevaluación

Determinése si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. El centro y el radio del intervalo $[-1, 3]$ son 1 y 2 respectivamente.

Verdadera

El centro del intervalo es el punto medio entre -1 y 3 , es decir, 1 . El radio es la diferencia en valor absoluto entre un extremo y el centro, por tanto, el radio es 2 .

2. Todo el subconjunto acotado A de números reales verifica $\sup A \in A$.

Verdadera

El axioma del supremo establece que todo conjunto acotado superiormente tiene un supremo en \mathbb{R} .

3. Una sucesión de números reales puede ser a la vez no convergente y acotada.

Verdadera

La sucesión $a_n = (-1)^n$ no converge y está acotada en $[-1, 1]$ (Figura 1.6.1).

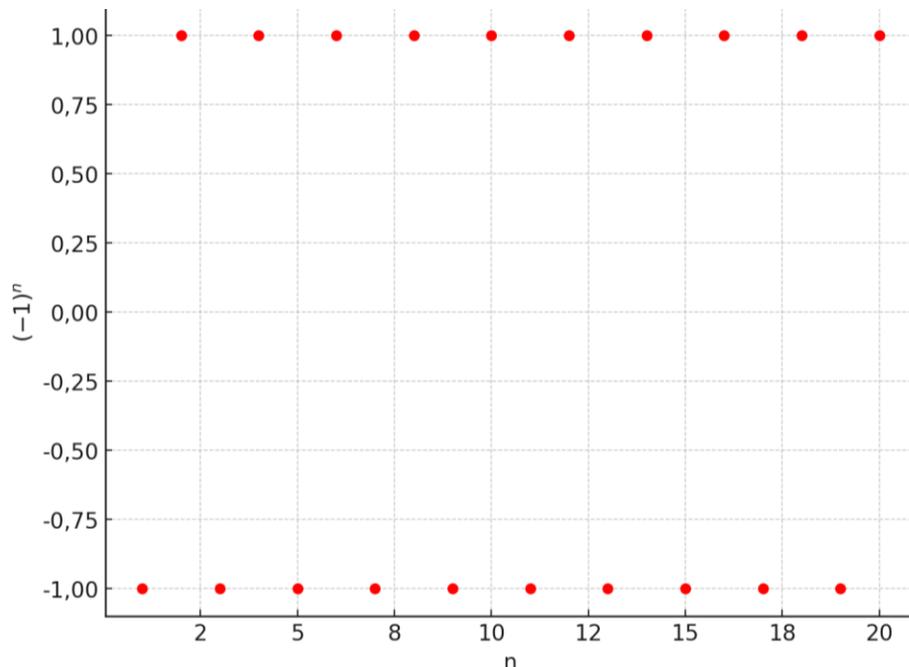


Figura 1.6.1. Representación gráfica de la sucesión $a_n = (-1)^n$.

4. Si converge $\{|a_n|\}$, entonces también converge $\{a_n\}$.

Falsa

La sucesión $|a_n| = |(-1)^n|$ converge, pero $a_n = (-1)^n$.





5. Sabiendo que $a_n \neq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

Correcta

Si a_n converge entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = 1^{\infty} \text{ (Indet.)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a_n-1) \frac{1}{a_n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n}} = e^1 = e.$$

6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} \frac{1}{n}$ es convergente por el criterio de Leibniz.

Verdadera

Se trata de una serie alternada, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, y además decreciente, pues $\{|a_n|\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n\}$, por tanto, como

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \right| = 0$, la serie converge (Figura 1.6.2).

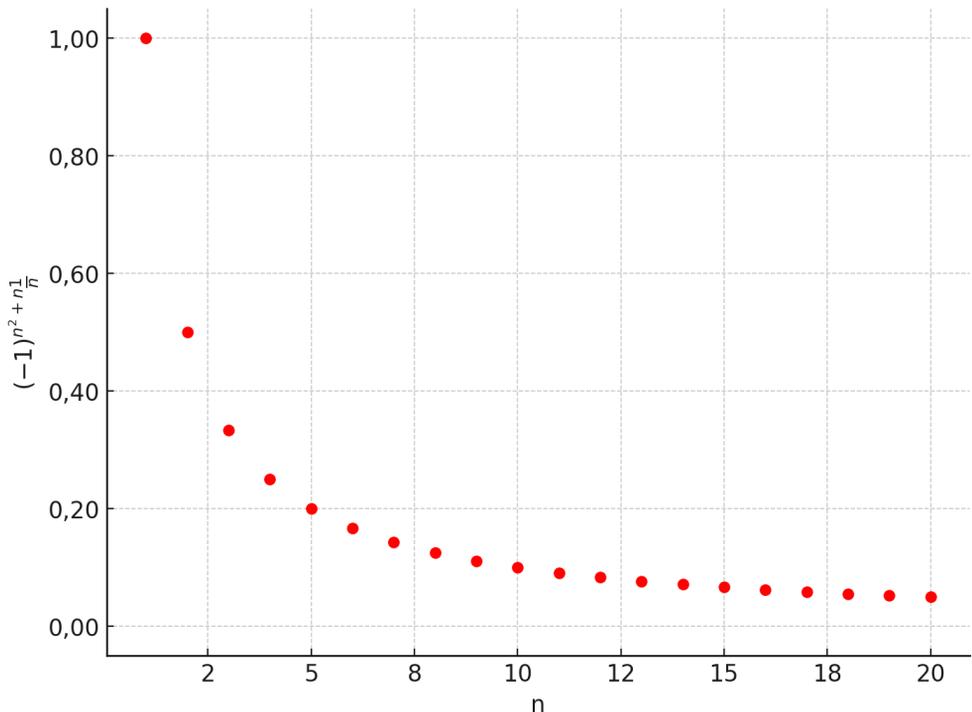


Figura 1.6.2. Representación gráfica de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} \frac{1}{n}$.

7. Si f y g son funciones continuas en a , entonces es continua $\frac{f}{g}$ en a .

Falsa

Debe cumplirse también que $g \neq 0$.





8. Sea f continua en el intervalo cerrado y acotado I . El método de la bisección puede aplicarse a la ecuación $f(x) = 0$ en I siempre que existe un $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.

Falsa

Para aplicar el teorema de Bolzano, es decir, para exista un punto de corte entre $f(x)$ y el eje OX que satisfaga la ecuación $f(x) = 0$, $f(x)$ debe ser continua en el intervalo $I = [a, b]$ y además el producto de las imágenes de los extremos de I sea negativo: $f(a) \cdot f(b) < 0$ (Figura 1.6.3).

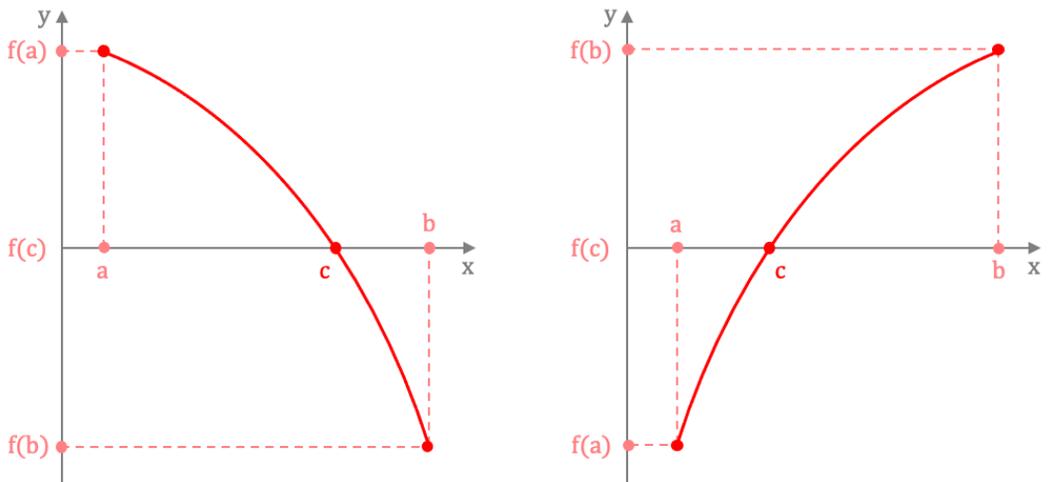


Figura 1.6.3. Representación gráfica del teorema de Bolzano para una función cualquiera.

9. La convergencia uniforme garantiza la convergencia puntual.

Verdadera

Si una sucesión de funciones f_n converge uniformemente a la función límite f en un intervalo determinado, entonces también converge puntualmente. Lo mismo ocurre en las series de funciones..

10. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es $\frac{1}{3}$.

Verdadera

Por el criterio del cociente aplicado a series de potencias, el radio de curvatura es $1/S$, por tanto, como $S = 3$, el radio de convergencia es $1/3$.

