Ejercicios de autoevaluación

Determínese si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. **El centro y el radio del intervalo $[-1, 3]$ son 1 y 2 respectivamente.**

   R: Sección 1.1.

2. **Todo el subconjunto acotado A de números reales verifica $supA \in A$.**

   R: Sección 1.1.

3. **Una sucesión de números reales puede ser a la vez no convergente y acotada.**

   R: Sección 1.2.

4. **Si converge $\{|a_n|\}$, entonces también converge $\{a_n\}$.**

   R: Sección 1.2.

5. **Sabiendo que $a_n \neq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se verifica**

$$\lim_{n\to\infty}(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

   R: Sección 1.3.

6. **La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2+n}\frac{1}{n}$ es convergente por el criterio de Leibniz.**

   R: Sección 1.3.

7. **Si f y g son funciones continuas en a, entonces es continua $\frac{f}{g}$ en a.**

   R: Sección 1.4.

8. **Sea f continua en el intervalo cerrado y acotado I. El método de la bisección puede aplicarse a la ecuación $f(x) = 0$ en I siempre que existe un $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.**

   R: Sección 1.4.

9. **La convergencia uniforme garantiza la convergencia puntual.**

   R: Sección 1.5.

10. **Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es $\frac{1}{3}$.**

    R: Sección 1.5.

Ejercicios de autoevaluación

Determínese si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

$c = \frac{-1+3}{2} = 1$

$r = |3-1| = 2$

$|x-1| \leq 2$

$-2 \leq x-1 \leq 2$

1. El centro y el radio del intervalo $[-1, 3]$ son 1 y 2 respectivamente.

Verdadera

El centro del intervalo es el punto medio entre -1 y 3, es decir, 1. El radio es la diferencia en valor absoluto entre un extremo y el centro, por tanto, el radio es 2.

2. Todo el subconjunto $\boxed{\text{acotado}}$ A de números reales verifica $supA \in A$.

Verdadera → SUPERIOR E INFERIORMENTE

El axioma del supremo establece que todo conjunto acotado superiormente tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

3. Una sucesión de números reales puede ser a la vez no convergente y acotada.

Verdadera

La sucesión $a_n = (-1)^n$ no converge y está acotada en $[-1,1]$ (Figura 1.6.1).

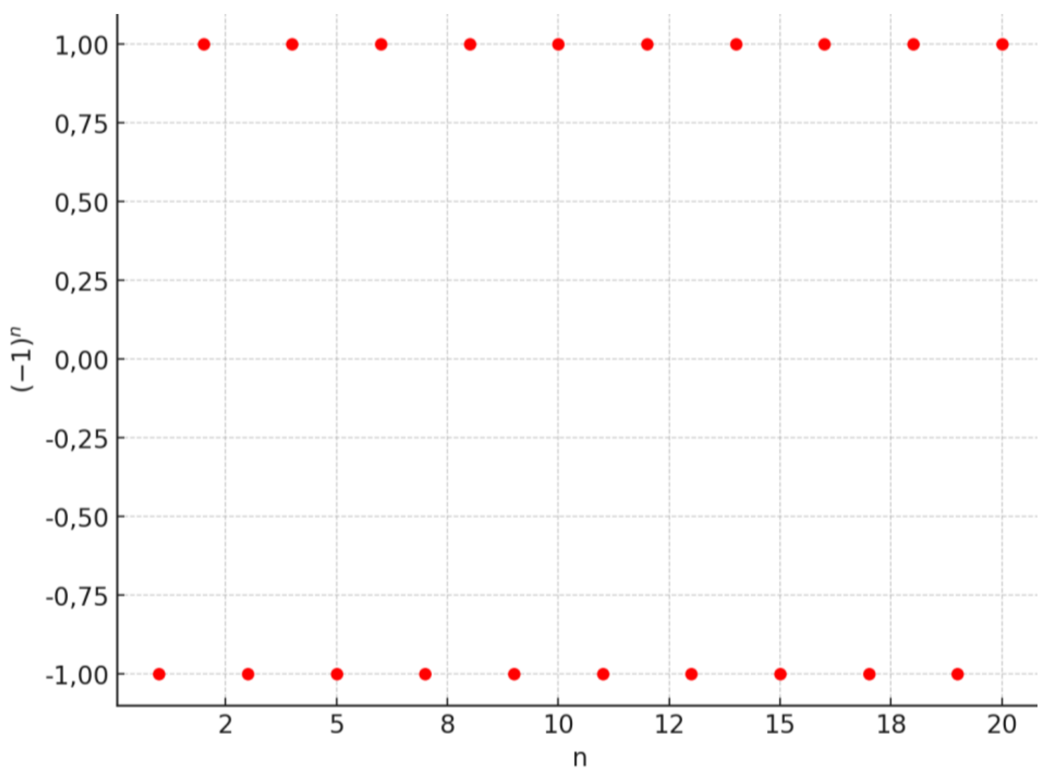


Figura 1.6.1. Representación gráfica de la sucesión $a_n = (-1)^n$.

4. Si converge $\{|a_n|\}$, entonces también converge $\{a_n\}$.

Falsa

La sucesión $|a_n| = |(-1)^n|$ converge, pero $a_n = (-1)^n$.

5. Sabiendo que $\boldsymbol{a_n \neq 0}$ y $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ es convergente, se verifica

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.}$$

Correcta

Si a_n converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\boxed{(1+a_n)}}_{f(x)}{}^{\overbrace{\boxed{\frac{1}{a_n}}}^{g(x)}} = 1^{\infty}\ (Indet.) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\overbrace{\boxed{\cancel{1}+a_n}}^{f(x)}-\cancel{1}\right)\overbrace{\boxed{\frac{1}{a_n}}}^{g(x)}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n}} = e^1 = e.$$

6. La serie $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2+n}\frac{1}{n}}$ es convergente por el criterio de Leibniz.

Verdadera

Se trata de una serie alternada, ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\boxed{(-1)^{n^2+n}}}^{(-1)^{f(n)}}\overbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}^{a_n} = \underline{1} - \underline{\frac{1}{2}} + \underline{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \cdots$, y además decreciente, pues $\{|a_n|\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n\}$, por tanto, como $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}}\right| = 0$, la serie converge (Figura 1.6.2).

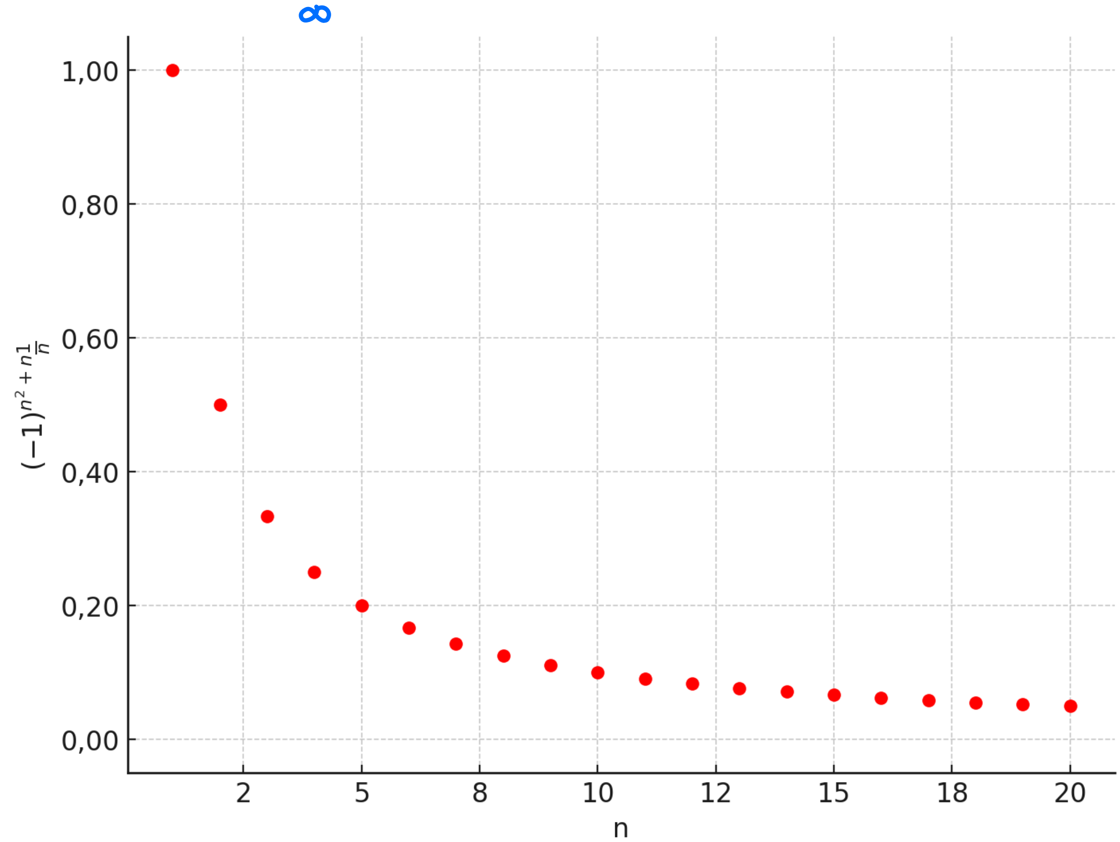


Figura 1.6.2. Representación gráfica de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2+n}\frac{1}{n}$.

7. Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son funciones continuas en $\boldsymbol{\boxed{a}}$ entonces es continua $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$ en $\boldsymbol{a}$.

$x = a\ (x = x_0)$

Falsa

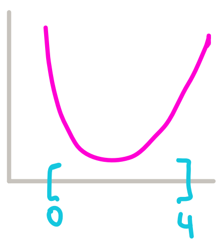
Debe cumplirse también que $g \neq 0$. en a.

8. **Sea f continua en el intervalo cerrado y acotado I. El método de la bisección puede aplicarse a la ecuación $f(x) = 0$ en I siempre que existe un $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.**

Falsa

Para aplicar el teorema de Bolzano, es decir, para exista un punto de corte entre f(x) y el eje OX que satisfaga la ecuación f(x) = 0, f(x) debe ser continua en el intervalo $I = [a, b]$ y además el producto de las imágenes de los extremos de I sea negativo: f(a) · f(b) < 0 (Figura 1.6.3).

$f(x) = x^2 + 1$



$f(c) = 0$

$c^2 + 1 = 0$

$c^2 = -1$

$c = \pm\sqrt{-1}$

f NO CORTA AL EJE OX.

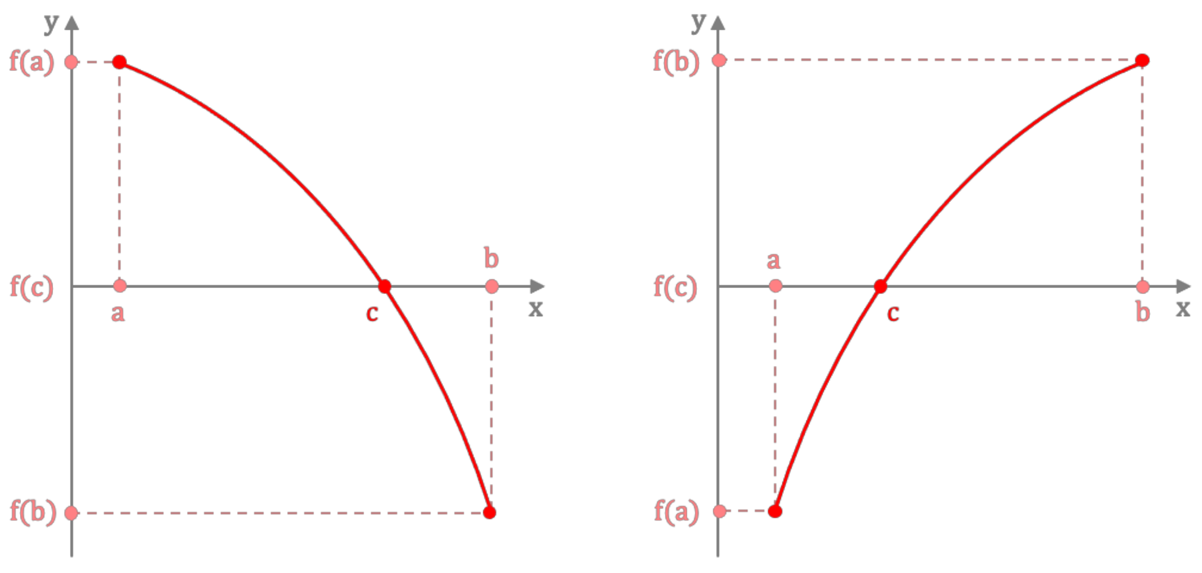


Figura 1.6.3. Representación gráfica del teorema de Bolzano para una función cualquiera.

9. **La convergencia uniforme garantiza la convergencia puntual.**

Verdadera

Si una sucesión de funciones f_n converge uniformemente a la función límite f en un intervalo determinado, entonces también converge puntualmente. Lo mismo ocurre en las series de funciones..

10. **Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es $\frac{1}{3}$.**

Verdadera

Por el criterio del cociente aplicado a series de potencias, el radio de curvatura es $1/S$, por tanto, como $S = 3$, el radio de convergencia es $1/3$.