1. El paso al límite

Este capítulo se compone de cinco secciones. En la primera se explica el origen del espacio de los números reales y su significado, mientras que en la segunda y tercera parte se estudia la convergencia de las sucesiones y las series, respectivamente. En la cuarta parte se estudia la función junto a su dominio, límites, asíntotas y continuidad, para terminar con el estudio de la convergencia de las sucesiones series de funciones en la quinta y última sección.

1.1. El espacio $\mathbb{R}$

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) es el más pequeño y del que parten todos los demás conjuntos numéricos. Los números naturales se utilizan para contar, son discretos y positivos, y cada uno siempre tiene un siguiente:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Si se suman y restan los números naturales, aparece el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), que está compuesto por los números naturales positivos y el cero:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Si se multiplican y dividen los números enteros, aparece el conjunto de números racionales ($\mathbb{Q}$), cuyos resultados son números enteros o con decimales exactos o periódicos. En la división, el cero no puede aparecer en el denominador:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \text{Todas las fracciones } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \text{ donde } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Axiomas algebraicos para el conjunto de números racionales

El conjunto de los números racionales conforma un cuerpo, es decir, un conjunto con las operaciones suma y producto bien definidas y que además satisface las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva de la multiplicación sobre la suma, existencia de elemento neutro y opuesto/inverso, así como el cierre bajo la resta y división[1] (Tabla 1.1.1).

[1]El cierre bajo la resta significa que el resultado de la resta $a - b$ es un número racional, mientras que el cierre bajo la división significa que, para todo $b \neq 0$, el resultado de la división a/b es también un número racional.

Tabla 1.1.1. Propiedades del cuerpo de números racionales.

Propiedad	Suma	Producto
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
Conmutativa	$a+b=b+c$	$ab=ba$
Distributiva (del producto respecto a la suma)	–	$a(b+c)=ab+ac$
Elemento neutro	$a+0=0+a=a$	$a1=1a=a$
Elemento opuesto/inverso	$a+(-a)=-a+a=0$	$a\frac{1}{a}=\frac{1}{a}a=1$
Cierre	$a-b\in\mathbb{Q}$	$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\quad(b\neq 0)$

Axioma del orden para el conjunto de números racionales

La estructura del conjunto los números racionales posee un orden, lo que significa que se cumplen las propiedades de la Tabla 1.1.2, por lo que dados $a, b\in\mathbb{Q}$, solamente se puede cumplir $a<b$, $a=b$ o bien $a>b$. Entonces, dado $c\in\mathbb{Q}$ si $a<b$ y $b<c$ necesariamente $a<c$, lo que implica que $\mathbb{Q}$ constituye una recta (horizontal) compuesta por todos los valores del conjunto ordenados de menor a mayor en el sentido de izquierda a derecha.

Axioma de la densidad para el conjunto de los números racionales

Asimismo, si $a<b$, entonces $(a+b)/2$ es el punto medio del segmento, lo que implica que los números racionales están densamente anidados, una condición que no evita que la recta contenga «huecos». Esto se debe a que por muchos decimales que se les añadan a los valores de $\mathbb{Q}$ para aproximarse a los valores irracionales ($\sqrt{2}$, por ejemplo), estos no los pueden sustituir.

Tabla 1.1.2. Propiedades del cuerpo de números racionales.

Propiedad	Característica		
Orden total	$a\leq b$ o $a\geq b$		
Reflexiva	$a\leq a$		
Antisimétrica	$a\leq b$ y $a\geq b$	entonces	$a=b$
Transitiva	$a\leq b$ y $b\leq c$	entonces	$a\leq c$
Relación con la suma	$a\leq b$	entonces	$a+c\leq b+c$
Relación con el producto	$a\leq b$ y $c\geq 0$	entonces	$ac\leq bc$

Consecuencia del axioma de la densidad de los números racionales en $\mathbb{R}$

Se trata de la «propiedad arquimediana», que establece lo siguiente:

(i) Dado un número cualquiera $x \in \mathbb{R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

(ii) Dado un número real $y > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < y$.

Esta propiedad es importante en los criterios de comparación de las series.

Axioma de completitud para el conjunto de números reales / Recta real

Para rellenar esos «huecos» dejados por $\mathbb{Q}$ se añade el conjunto de números irracionales ($\mathbb{I}$), que son los que no pueden expresarse como una fracción de dos enteros porque tienen infinitos decimales que no siguen ningún patrón de repetición. Los elementos de $\mathbb{I}$ son las raíces n-ésimas de números enteros positivos como $\pm\sqrt{2} = \pm\,1{,}414\ldots$ o $\pm\sqrt[7]{5{,}72} = \pm 2{,}282\ldots$ y relaciones de proporciones como $e = 2{,}718\ldots$ y $\pi = 3{,}141\ldots$. Por tanto, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ constituyen el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), cuya estructura es la misma que la de $\mathbb{Q}$, es decir, el grupo $\mathbb{R}$ tiene como subgrupo a $\mathbb{Q}$, por lo que cumple con las propiedades de las Tablas 1.1.1 y 1.1.2 y la representación gráfica en forma de recta es un continuo[2] (Figura 1.1.1).

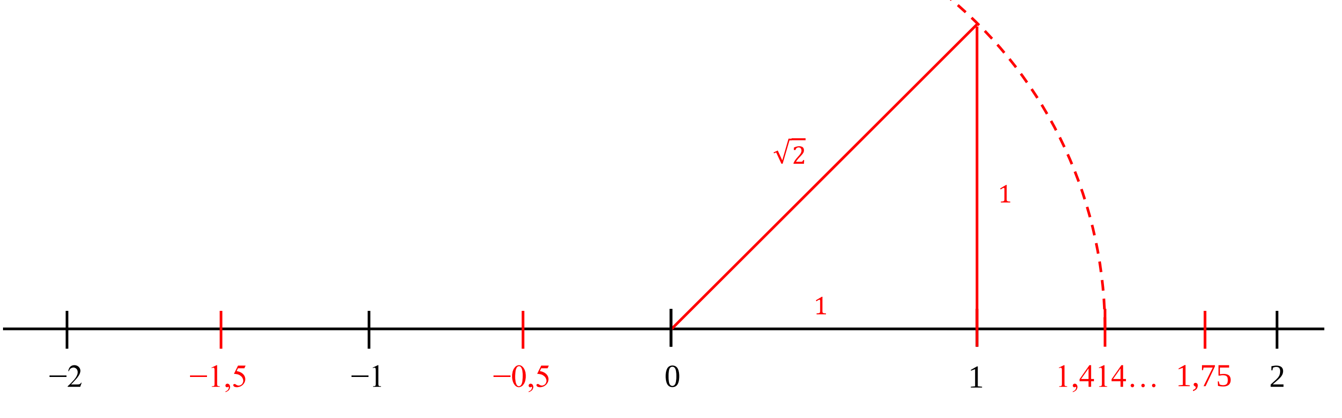


Figura 1.1.1. Recta de los números reales.

[2]Existen infinitos puntos para formar la recta, por eso es densa (entre dos puntos siempre hay otro) y está completa (no hay ni un solo «hueco» donde no haya un valor real).

Debido a todo lo anterior, se pueden resumir las condiciones de los conjuntos en $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, cumpliéndose que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, como se puede observar en la Figura 1.1.2.

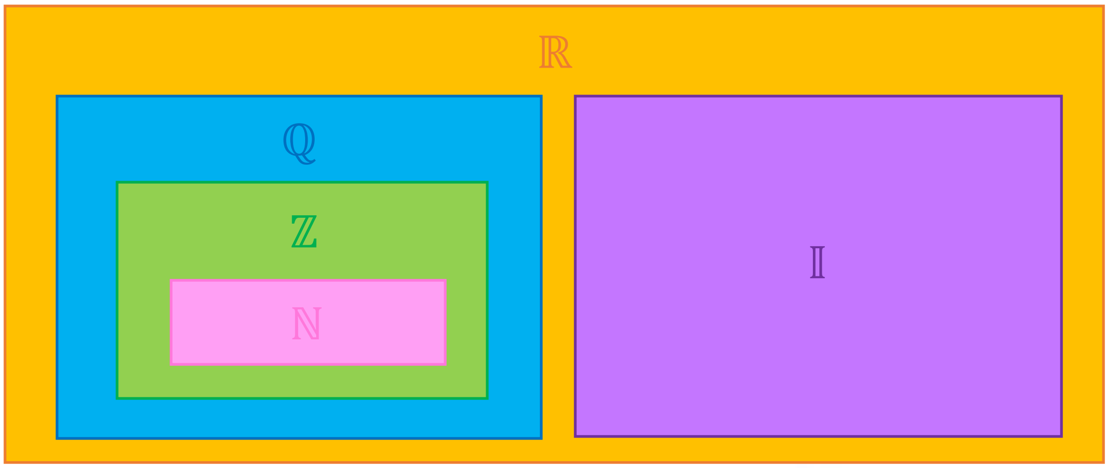


Figura 1.1.2. Conjuntos de números que conforman el conjunto de los números reales.

Consecuencia del axioma de completitud en $\mathbb{R}$

Para explicar que la recta es un continuo (no hay huecos entre los infinitos puntos que forman la recta) se parte del axioma de completitud: «todo conjunto no vacío de números reales que esté acotado superiormente tiene una cota superior mínima». Esto significa que un conjunto no vacío (A) tiene una cota superior mínima o supremo ($supA$) si está acotado superiormente y una cota inferior máxima o ínfimo ($inf A$) si está acotado inferiormente, por tanto:

- Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado superiormente si existe un número $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c_1$ para todo $a \in A$. El número c_1 se denomina cota superior de A.
- Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado inferiormente si existe un número $c_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq c_2$ para todo $a \in A$. El número c_2 se denomina cota inferior de A.

- **Ejemplo.** Calcular las cotas superior e inferior del conjunto $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 5\}$.

Paso 1. La cota superior es $c_1 = 5$, ya que $x < 5$ para todo $\mathrm{x} \in A = [0,5)$. También son cotas superiores 6, 10, 100 o 1000, ya que cualquier $\mathrm{x} \in A$ es inferior a esos valores.

Paso 2. La cota inferior es $c_2 = 0$, ya que $x \leq 0$ para todo $\mathrm{x} \in A = [0,5)$. También son cotas inferiores -6, -10, -100 o -1000, ya que cualquier $\mathrm{x} \in A$ es superior a esos valores.

- Dado $s \in \mathbb{R}$, es un supremo del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si cumple dos condiciones:
  - (i) s es una cota superior de A.
  - (ii) Si c_1 es una cota superior de A, entonces $s \leq c_1$.
- Dado $t \in \mathbb{R}$, es un ínfimo del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si cumple dos condiciones:
  - (i) t es una cota inferior de A.
  - (ii) Si c_2 es una cota inferior de A, entonces $t \geq c_2$.

Tanto el supremo como el ínfimo de A son únicos, pese a la posibilidad de que existan múltiples cotas superiores e inferiores (Figura 1.1.3). Si s_1 y s_2 son supremos de A, entonces por la condición (ii) se tiene que $s_1 \leq s_2$ y $s_1 \geq s_2$, lo que implica que $s_1 = s_2$, es decir, el supremo es único. Lo mismo ocurre con el ínfimo: si s_1 y s_2 son ínfimos de A, entonces por la condición (ii) se tiene que $s_1 \geq s_2$ y $s_1 \leq s_2$, por tanto, se concluye que $s_1 = s_2$ (el ínfimo es único).

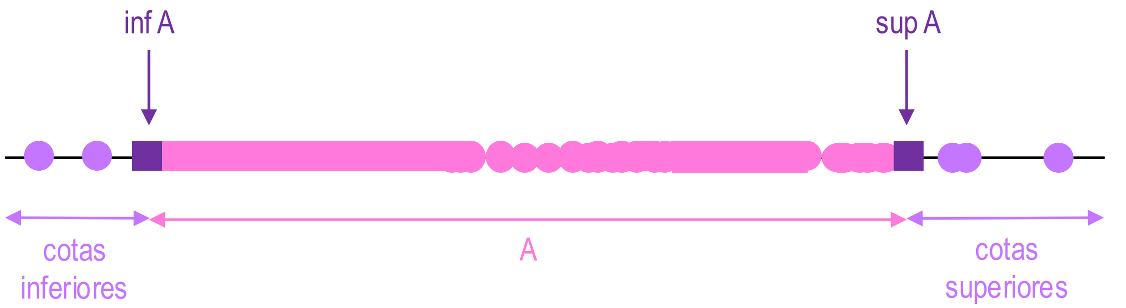


Figura 1.1.3. Definición de supremo e ínfimo de A.

- **Ejemplo.** Calcular el supremo y el ínfimo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 5\}$.

Paso 1. El supremo de A es $sup(A) = 5$, ya que es la mínima cota superior y coincide con la cota superior: $s \leq c_1$.

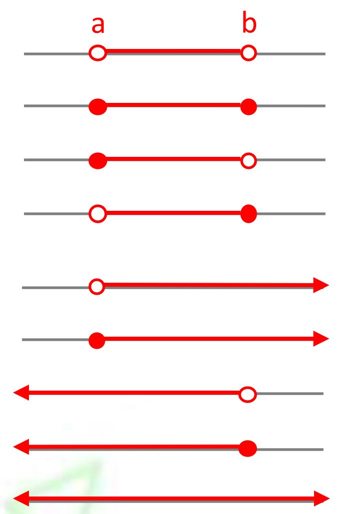
Paso 2. El ínfimo de A es $inf(A) = 0$, ya que es la mínima cota superior y coincide con la cota inferior: $t \geq c_2$.

Intervalos

Los intervalos son subconjuntos de la recta real y se clasifican en acotados (segmentos) y no acotados (semirrectas). Entonces, dados $a, b \in \mathbb{R}$ y aplicando el axioma del orden $\mathrm{a} < \mathrm{b}$, se definen los posibles intervalos como:

- $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$ (abierto)
- $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$ (cerrado)
- $[\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{a} \leq \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$ (semiabierto)
- $(\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{a} < \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$ (semiabierto)

- $(\mathrm{a}, +\infty) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{a} < \mathrm{x}\}$
- $[\mathrm{a}, +\infty) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{a} \leq \mathrm{x}\}$
- $(-\infty, \mathrm{b}) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$
- $(-\infty, \mathrm{b}] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



De acuerdo a lo anterior, a es el extremo inferior del intervalo y b el superior, que se corresponden con ínfimo y el supremo, respectivamente. En la representación gráfica de un intervalo, si el extremo es abierto (no pertenece al intervalo) se denota por un paréntesis o un punto con borde y sin relleno, mientras que si es cerrado (pertenece al intervalo), por un corchete o un punto con borde y relleno.

Punto medio y distancia entre dos puntos

Dentro de un intervalo, se puede calcular el punto medio como:

$$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}}{2}.$$

También se denomina como «centro» del intervalo, y a la distancia de a a c ($\overline{\mathrm{ac}} = \mathrm{d}(a, c) = |\mathrm{a} - \mathrm{c}|$), que es la misma que de c a b, se denomina radio. El radio se calcula como la mitad de la diferencia entre a y b:

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{b} - \mathrm{a}}{2},$$

cuyo signo será positivo a la derecha del centro y negativo a la izquierda, generando intervalos únicamente abiertos o cerrados:

- $(\mathrm{c} - \mathrm{r}, \mathrm{c} + \mathrm{r}) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon |\mathrm{x} - \mathrm{c}| < \mathrm{r}\}$ (abierto)
- $[\mathrm{c} - \mathrm{r}, \mathrm{c} + \mathrm{r}] = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon |\mathrm{x} - \mathrm{c}| \leq \mathrm{r}\}$ (cerrado)

1.2. Sucesiones

Una sucesión es una aplicación $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada número natural n un número real $f(n) = a_n$, proporcionando una secuencia de números reales $a_1, a_2, \ldots$ y se denota por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_n, \ldots\}$. En otras palabras, es un conjunto de números reales ordenados de acuerdo a un patrón matemático definido por el término general $a_n = f(n)$.

$$\begin{aligned} f\colon\ & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow a_n = f(n) \end{aligned}$$

Así, por ejemplo, el término general $a_n = n + 1$, donde n indica el n-ésimo término de la sucesión, genera una secuencia con los siguientes términos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + 1 = 2 \\ a_2 &= 2 + 1 = 3 \\ a_3 &= 3 + 1 = 4 \\ a_4 &= 4 + 1 = 5 \\ &\ldots \end{aligned}$$

lo que conforma la sucesión $\{a_n\} = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (Figura 1.2.1).

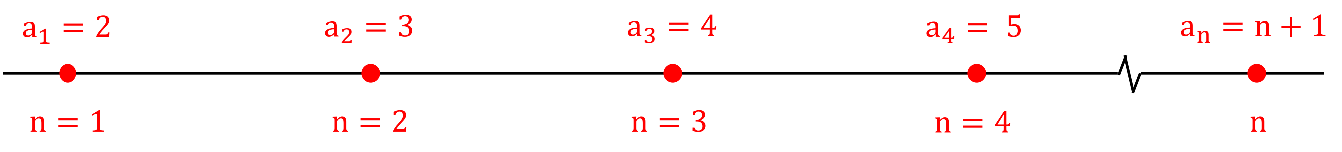


Figura 1.2.1. Representación en la recta de los números reales de la sucesión $a_n = n + 1$.

Generalmente la sucesión empieza en $n = 1$, pero en ocasiones lo puede hacer en $n = 0$ o en $n = n_0$, para todo número natural n_0 distinto de 1. Lo importante no es el valor de n inicial, sino que la sucesión sea una secuencia infinita de números reales. Asimismo, lo que sucede al principio de la secuencia (2, 3, 4, 5, ... del ejemplo anterior) no suele tener importancia en la mayoría de los casos, ya que el estudio del comportamiento de la función se hace en la «cola» infinita de la secuencia dada ($n + 1$ en el ejemplo anterior).

Convergencia de una sucesión

Una sucesión de números reales ($\{a_n\}$) converge a un valor real L, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|a_n - L| < \varepsilon$ (Figura 1.2.2). Esto significa que toda sucesión convergente es acotada, por tanto, $\{a_n\}$ es convergente si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ la sucesión es divergente y, si no converge ni diverge, entonces es oscilante.

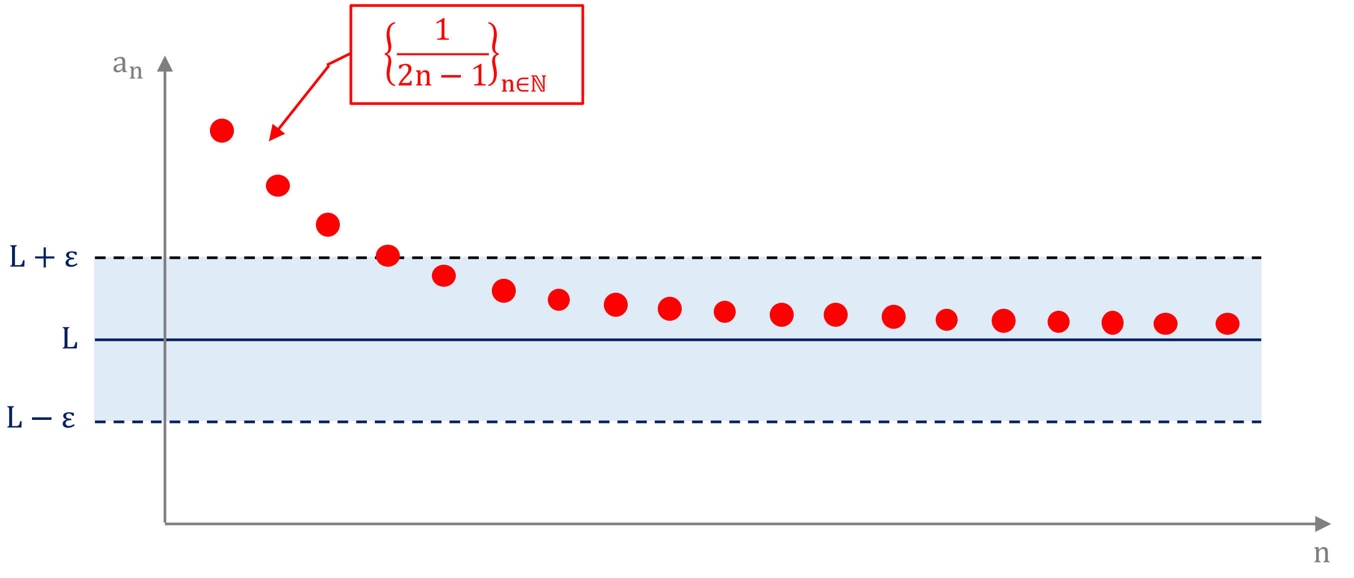


Figura 1.2.2. Representación gráfica del límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión $a_n = \frac{1}{2n-1}$ y la aplicación de la condición de límite.

- **Ejemplo.** La sucesión de término general $a_n = \frac{1}{2n-1}$ es convergente.

La sucesión $\{a_n\} = \{1, 1/3, 1/5, 1/7, \ldots\}$ es convergente, ya que el límite se hace nulo en el infinito:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

- **Ejemplo.** La sucesión constante de término general $a_n = 2$ es convergente.

Si se calcula el límite, se tiene que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$, por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene $|a_n - L| = |2-2| = 0 < \varepsilon$, donde $n \in \mathbb{N}$.

▪ **Ejemplo.** La sucesión que tiene por término general $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente.

La sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ es convergente, ya que el límite se hace nulo en el infinito:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{\infty} = 0,$$

como se puede observar gráficamente en la Figura 1.2.3.

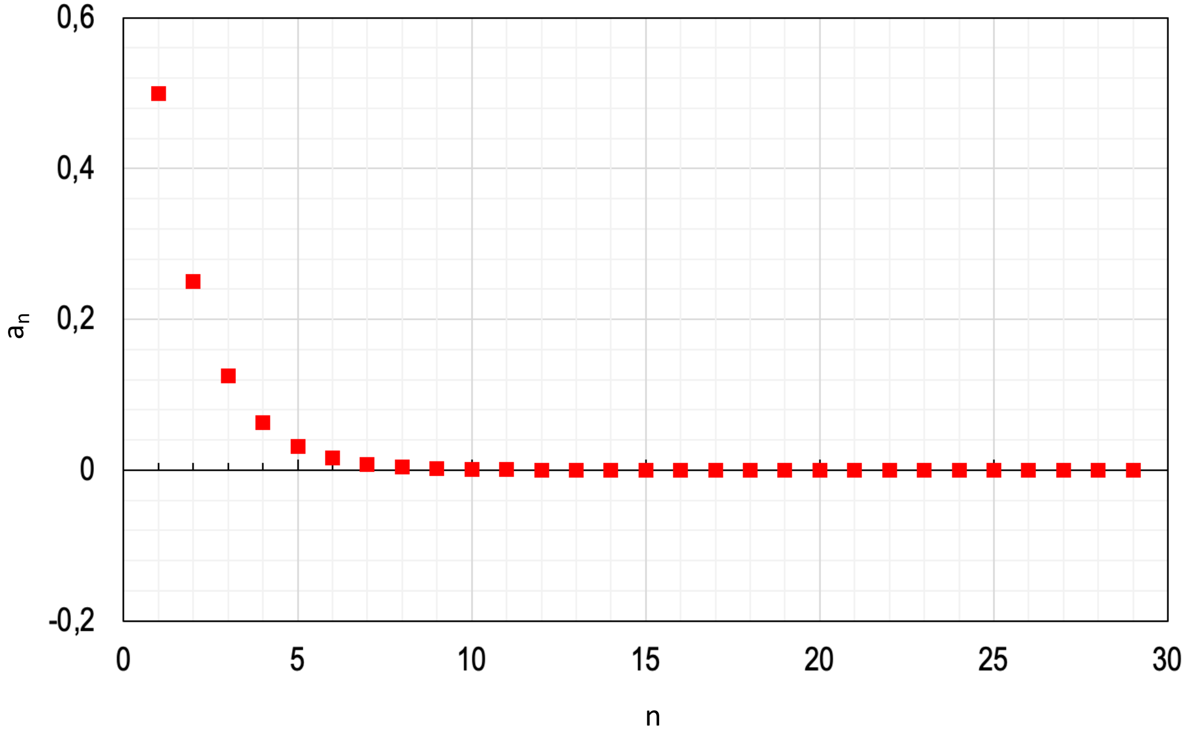


Figura 1.2.3. Representación gráfica del límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión $a_n = (1/2)^n$.

Sucesión acotada

Similarmente a la definición de un conjunto acotado, en este caso se aplica a $\{a_n\}$:

- Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El número M se denomina cota superior de $\{a_n\}$.
- Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \geq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El número m se denomina cota inferior de $\{a_n\}$.

Si $\{a_n\}$ tiene cotas inferior y superior, entonces la sucesión es acotada, lo que significa que los infinitos términos pertenecen al intervalo $[m, M]$.

- **Ejemplo.** La sucesión que tiene por término general $a_n = \frac{1}{n}$ es acotada.

La sucesión $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ es acotada porque tiene tiene cotas inferior y superior:

- La cota superior es $M = 1$, ya que $a_n = \frac{1}{n} \leq 1 = M$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, o lo que es lo mismo, $\{a_n\}$ es decreciente: $a_n > a_{n+1}$.
- La cota inferior es $m = 0$, ya que para $\forall n \in \mathbb{N}$, todos los términos de $\{a_n\}$ son positivos.

Propiedades

Sean $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = P$, siendo L y P números reales $(L, P \in \mathbb{R})$, entonces:

- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + P$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda L$ $\qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \cdot P$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n / \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L/P$ $\qquad P \neq 0$

Límites infinitos

Cuando $n \to \infty$ hay que sustituir la n por ∞ en el límite, por lo que hay que tener en cuenta las posibles indeterminaciones que pueden aparecer, ya que no todas las operaciones están definidas en $\overline{\mathbb{R}}$, lo que significa que cada una tiene un método propio de resolución. Las indeterminaciones son

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 1^{\infty},$$

y se explican en la sección 1.4. Cuando aparece la variable n en la base (potencial) y en el exponente (exponencial), se procede de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \cdot \ln a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot \ln a_n}$$

Esta herramienta matemática procede de la aplicación de logaritmos a ambos lados de la igualdad de la función potencial-exponencial para bajar el exponente:

$$y = {a_n}^{b_n}$$
$$\ln y = \ln\left({a_n}^{b_n}\right)$$
$$\ln y = b_n \cdot \ln a_n$$
$$y = e^{b_n \cdot \ln a_n}$$

▪ **Nota.** Regla de resolución de un límite de una función potencial exponencial: Resolver $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^{b_n}$.

Monotonía

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento

- Sucesión $\{a_n\}$ monótona creciente: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Sucesión $\{a_n\}$ monótona decreciente: $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para estudiar la monotonía, se puede aplicar el límite cuando $n \to \infty$ a la derivada del término general de la sucesión (pendiente de la recta tangente, da_n/dn), pues es una función ($a_n = f(n)$). En este caso, la sucesión es creciente si el valor es positivo ($a_{n+1} - a_n > 0$) y decreciente si es negativo ($a_{n+1} - a_n < 0$).

Enlazando con la convergencia y la acotación, si una sucesión $\{a_n\}$ es monónona y acotada, entonces es convergente.

▪ **Ejemplo.** La sucesión que tiene por término general $a_n = \frac{1}{n}$ es convergente

Anteriormente se definió la sucesión $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ como acotada porque tiene cotas inferior ($m = 0$) y superior ($M = 1$). Asimismo, $\{a_n\}$ es monónotona decreciente, ya que $a_{n+1} < a_n$, por tanto, $\{a_n\}$ es convergente.

Criterios de convergencia

Criterio de Stolz

Es un criterio que se usa cuando el cálculo del límite no es fácil directamente y resulta muy útil cuando aparecen indeterminaciones del tipo ∞/∞ y $0/0$. Por definición, dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L,$$

siempre que se cumpla alguna de las condiciones siguientes (cuidado con el denominador de un límite):

- $\{b_n\}$ es monótona y $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$
- $\{b_n\}$ es monótona y $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- **Ejemplo.** La sucesión que tiene por término general $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ es convergente.

Como el límite parece difícil de calcular, se aplica el criterio de Stolz:

- $a_n = \ln(n)$
- $b_n = n$, que es monótona creciente y $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{1} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

Otra manera, sin utilizar el criterio de Stolz y sabiendo que $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$, es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\infty}{\infty}(\text{indet.}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1.3. Series

Sea $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{s_n\} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ una sucesión de sumas parciales de los *n* primeros términos ($s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, …, $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_i$), en conjunto ($\{a_n\}$,$\{s_n\}$) forman una serie compuesta por los términos de $\{a_n\}$ y se denota como $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Así, por ejemplo, a partir del término general $a_n = 1/2^n$ y de $\{s_n\}$, se halla el término general de la serie como sigue:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{r(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

lo que conforma la sucesión $\{s_n\} = \{1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \dots\}$ (Figura 1.3.1).

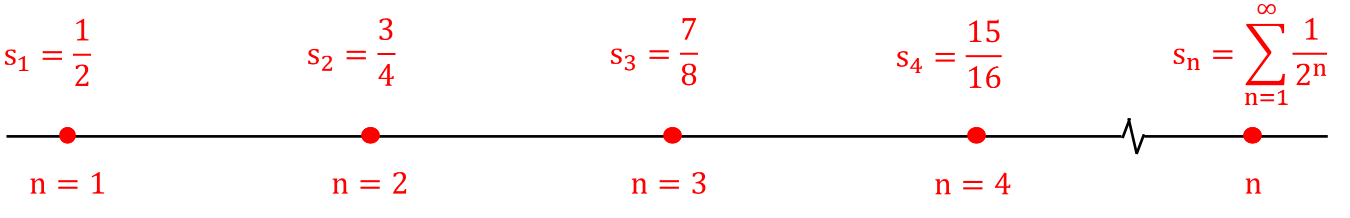


Figura 1.3.1. Representación en la recta de los números reales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$.

Convergencia de una serie

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente, es decir, si existe el límite de a_n y es nulo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

El valor al que converge la serie se calcula como $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

▪ **Ejemplo.** La serie $a_n = 1/2^n$ es convergente y el valor al que converge es 1.

Paso 1. Cálculo del límite para evaluar la convergencia (Figura 1.3.2a):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Paso 2. Cálculo del valor de convergencia (Figura 1.3.2b):

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1.$$

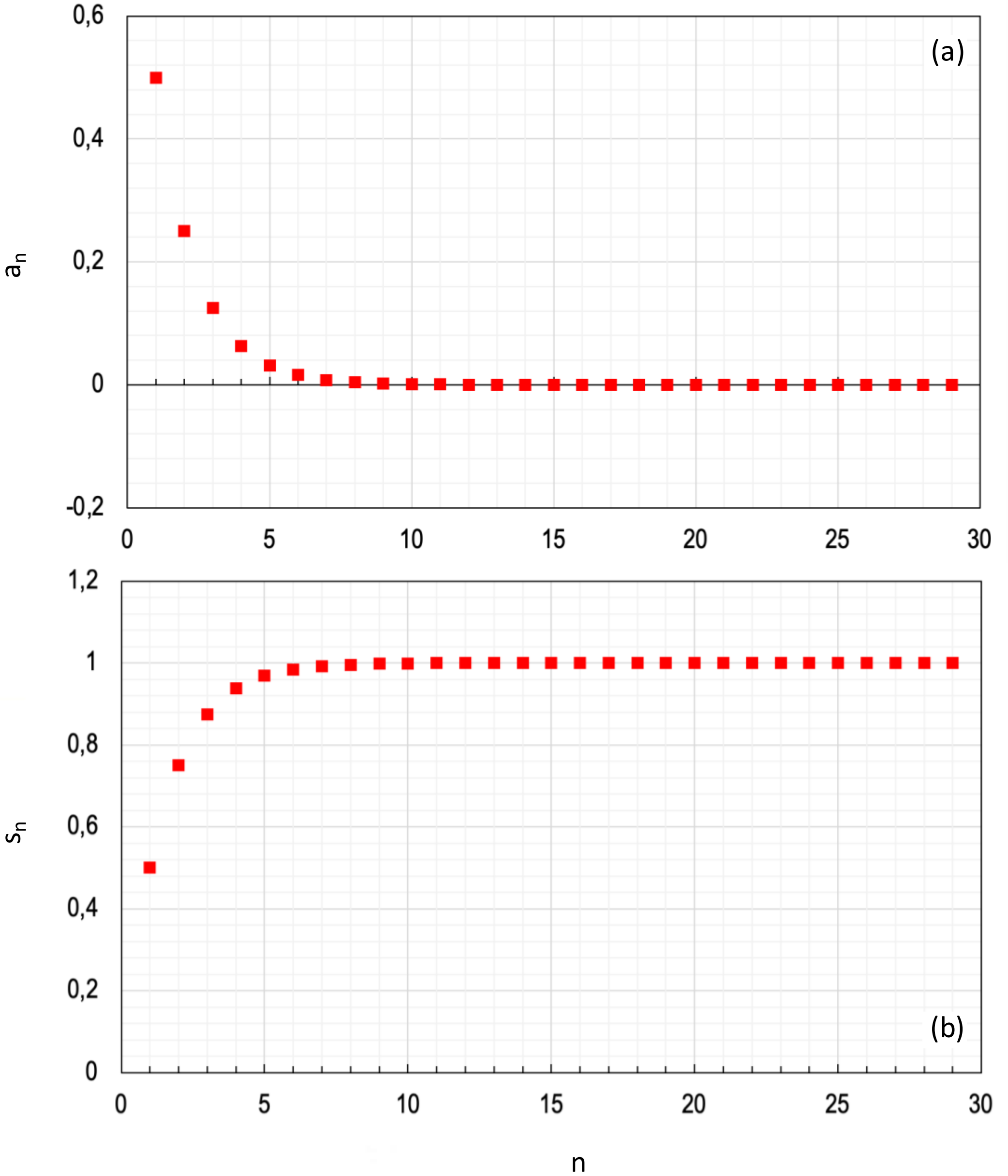


Figura 1.3.2. Representación gráfica de las sucesiones (a) a_n y (b) s_n.

Propiedades

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series convergentes, entonces:

- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$

Series de términos no negativos

En esta sección se consideran series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos no negativos, es decir, $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ para $\forall n \geq 1$.

Criterio de comparación

Se suele usar cuando se puede comparar una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con otra más simple $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de la que se conoce su convergencia/divergencia. Por tanto, dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos no negativos y conocida su convergencia/divergencia, la convergencia/divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede estudiar mediante dos métodos: directo y/o paso al límite.

- Directo: Compara los términos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con los de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de convergencia conocida.
  - Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
  - Si $0 \leq b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

- Límite: Útil cuando la relación entre los términos de las dos series no es obvia o no es la misma para todos los términos. Entonces, suponiendo que existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n$, se tiene que:
  - Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n \in (0,\infty)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

    Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n \in (0,\infty)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
  - Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

    Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\longrightarrow$ No decide.
  - Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

    Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\longrightarrow$ No decide.

- **Ejemplo.** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ es convergente.

Paso 1. Encontrar una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con la que comparar:

$$n^2 + n > n^2,$$

por tanto,

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2},$$

entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Paso 2. Análisis de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

por tanto, la serie es convergente.

Paso 3. Aplicación del criterio de comparación (método directo):

(Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge)

$$0 < \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \text{ converge.}$$

Criterio del cociente (de D'Alambert)

Se suele aplicar en series en las que el cociente a_{n+1}/a_n se simplifique fácilmente, como en el caso de factoriales y potencias. Por tanto, sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos no negativos y suponiendo que existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$, entonces:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1 \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n > 1 \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1 \quad \longrightarrow$ No decide

- **Ejemplo.** La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ es convergente.

Paso 1. Aplicando el criterio del cociente se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{n^3}}{\frac{3^{n+1}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{3}=$$

$$=\frac{(1+0)^3}{3}=\frac{1}{3}.$$

Paso 2. Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}<1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ converge.

Criterio de la raíz (de Cauchy)

Sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es una serie de términos no negativos y suponiendo que existe $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, entonces:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1 \quad\longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1 \quad\longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1 \quad\longrightarrow\quad$ No decide.

- **Nota.** Si el criterio del cociente decide la convergencia, el de la raíz también.

- **Ejemplo.** La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ es convergente.

Paso 1. Aplicando el criterio de la raíz se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/n}}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{3\cdot\ln(n)}{n}}}{3}=\frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot\ln(n)}{n}}}{3}=\frac{e^{\frac{\infty}{\infty}(\text{indet.})}}{3}=$$

$$=\frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}}{3}=\frac{1}{3}.$$

Paso 2. Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}<1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ converge.

Series de términos alternados

En esta sección se considera la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$, es decir, los términos se van alternando entre positivos (o cero) y negativos (o cero) para $\forall n \geq 1$ ($\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$) y además la sucesión $\{|a_n|\}$ es decreciente.

Criterio de Leibniz

Sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ es alternada y $\{|a_n|\}$ es decreciente, entonces:

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \to$ No decide

- **Ejemplo.** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente

Paso 1. Comprobar que la serie es alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Paso 2. Sabiendo que es alternada, comprobar que $\{|a_n|\}$ es decreciente:

$$\{|a_n|\} = \left\{\left|\frac{1}{n}\right|\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Paso 3. Se aplica el criterio de Leibniz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

por tanto, la serie es convergente.

1.4. Límites y continuidad

1.4.1. Las funciones

Dados dos conjuntos A y B, una función (f) que va de A hasta B es una regla que asocia cada elemento $x \in A$ con un único elemento de B, la imagen (y). Se denota por:

$$\begin{aligned} \mathrm{f}\colon\ \ \mathrm{A} &\longrightarrow \mathrm{B} \\ \mathrm{x} &\longrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{f(x)} \end{aligned}$$

donde $x \in A$ es la variable independiente (antiimagen), $\mathrm{y} = f(x) \in B$ la dependiente, A es el dominio de f y B no necesariamente tiene que ser el rango de f, sino que éste es el subconjunto de B definido por $\{y \in B: y = f(x)$ para cualquier $x \in A\}$.

Dominio de una función

Es el conjunto de elementos de A que tienen imagen:

$$\mathrm{Dom\ f} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{A}/\mathrm{f(x)} \in \mathrm{B}\}$$

Dicho de otra manera: son los valores de *x* para los que existe *y*. Se estudiarán los dominios de las funciones polinómicas, exponenciales, racionales, irracionales y logarítmicas.

- **Función polinómica o potencial**

  Es todos y cada uno de los valores del conjunto de números reales..

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax^n} + \mathrm{bx^{n-1}} + \cdots$$
$$\mathrm{Dom\ f} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

- **Ejemplo.** El dominio de $f(x) = 5x^4 + 7x^3 - x^2 + 1$ es $\mathrm{Dom\ f} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

- **Función exponencial**

  Es todos y cada uno de los valores del conjunto de números reales..

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{a^x}$$
$$\mathrm{Dom\ f} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

- **Ejemplo.** El dominio de $f(x) = e^x$ es $\mathrm{Dom\ f} = \mathbb{R}$.

- **Función racional**

  Es todos y cada uno de los valores del conjunto de números reales excepto los valores puntuales que anulan el denominador. Aunque compartan algún factor el numerador y el denominador, el dominio se halla antes de simplificar la función.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\text{Valores que hacen } Q(x) = 0\}$$

- **Ejemplo.** El dominio de $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1}$ es Dom f $= \mathbb{R} - \{-1,1\}$.

- **Función irracional**

  Es todos y cada uno de los valores del conjunto de números reales que cumplen la condición de que el radicando sea mayor o igual a cero. Se debe prestar especial atención a funciones polinómicas factorizables de grado igual o superior a dos, ya que se debe proceder al tanteo.

$$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$$

$$\text{Dom } f = [\text{Valores que hacen } P(x) \geq 0]$$

- **Ejemplo.** El dominio de $f(x) = \sqrt{x-1}$ es Dom f $= [1, +\infty)$.

- **Ejemplo.** El dominio de $f(x) = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ es Dom f $= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Paso 1. Factorizar el radicando:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Entonces, $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Paso 2. Evaluar la desigualdad $(x+1)(x-1) \geq 0$ en la recta $\mathbb{R}$ (Figura 1.4.1):

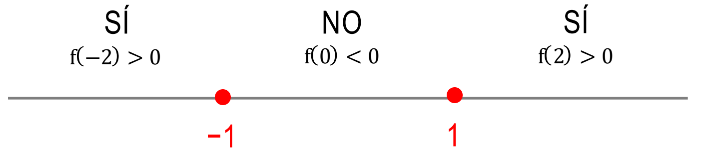


Figura 1.4.1. Evaluación del dominio de $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ en la recta $\mathbb{R}$.

Paso 3. El dominio es Dom f $= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

- **Función logarítmica**

  Es todos y cada uno de los valores del conjunto de números reales que cumplen la condición de que el argumento sea mayor a cero. Se debe prestar especial atención a funciones polinómicas factorizables de grado igual o superior a dos, ya que se debe proceder al tanteo.

$$f(x) = \log_a P(x)$$
$$\text{dom } f = (\text{Valores que hacen } P(x) > 0)$$

- **Ejemplo.** El dominio de $f(x) = \log(x^2 - 1) = \log[(x+1)(x-1)]$es $\text{Dom} f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Paso 1. Factorizar el argumento:

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Entonces, $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Paso 2. Evaluar la desigualdad $(x+1)(x-1) \geq 0$ en la recta $\mathbb{R}$ (Figura 1.4.2):

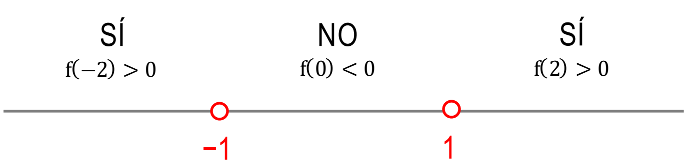


Figura 1.4.2. Evaluación del dominio de $f(x) = \log(x^2 - 1)$ en la recta $\mathbb{R}$.

Paso 3. El dominio es $\text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Propiedades

Dadas dos funciones *f* y *g* con el mismo dominio D, entonces:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad \text{Dom}(f+g)(x) = D$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ $\quad \text{Dom}(f-g)(x) = D$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\quad \text{Dom}(f \cdot g)(x) = D$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ $\quad \text{Dom}(f/g)(x) = D - \{\text{valores que hacen } g(x) = 0\}$

▪ **Ejemplo.** El dominio de $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} + \ln x$ es $\mathrm{Dom}\, f = (0, 1] \cup (2, +\infty)$.

1.4.2. Límites de funciones

Límite de una variable real

La función f(x) tiene por límite el número real L cuando x tiende a x_0 si, y solo si, para todo entorno de centro A y radio ε, existe un entorno reducido de centro x_0 y radio δ (Figura 1.4.3):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

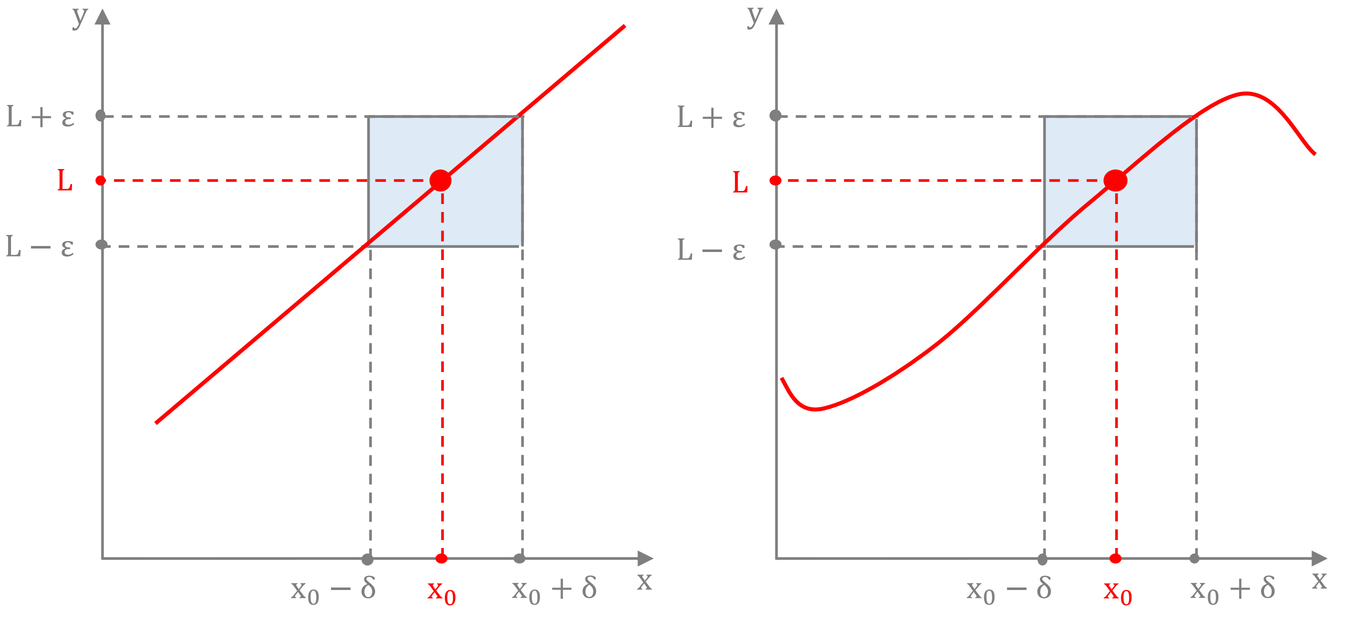


Figura 1.4.3. Representación gráfica de la definición de límite en una recta y una función curva cualquiera.

El límite de una función en un punto es único cuando existe, y si existe es porque los límites laterales son iguales,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad \longrightarrow \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad \longrightarrow \quad |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

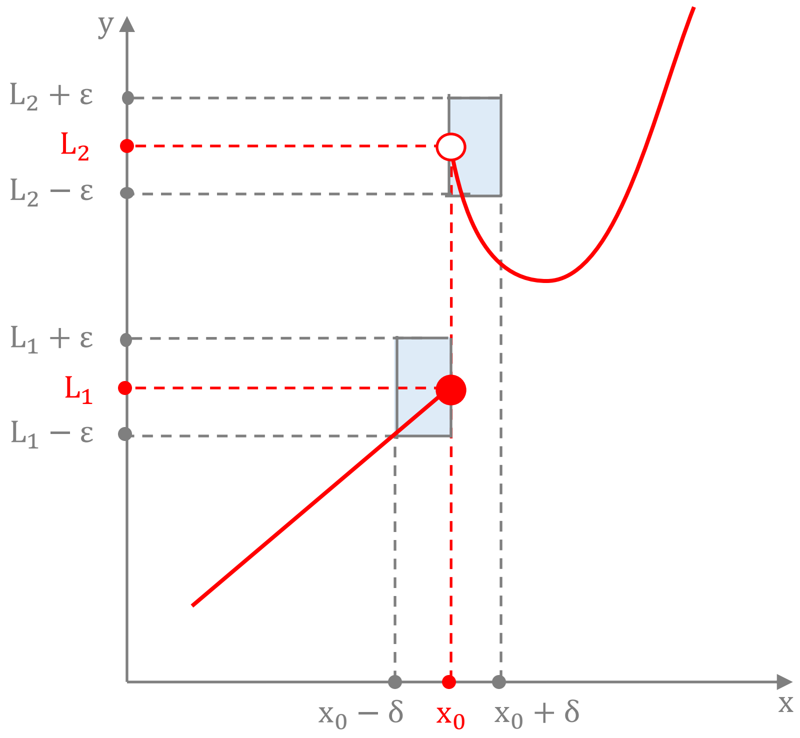


Figura 1.4.4. Representación gráfica de la definición de los límites laterales para el caso de una función a trozos cualquiera.

De acuerdo a lo anterior, si los límites laterales no coinciden, entonces la función es discontinua (Figura 1.4.4). El límite de una función (y) puede calcularse para cuando la variable x tiende a un número finito x_0 o bien al infinito (positivo o negativo). Para calcular el valor del límite debe sustituirse la variable por x_0 o $\pm\infty$, según corresponda, por ejemplo:

$$\lim_{x \to 3}(x+1) = 3 + 1 = 4\,,$$

$$\lim_{x \to \infty}(x+1) = \infty + 1 = \infty.$$

Por otro lado, hay que tener especial cuidado cuando el denominador se hace cero, independientemente del numerador, ya que los límites laterales pueden no existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \text{No existe}$$

debido a que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Asimismo, para resolver los límites de la función, hay que tener en cuenta las posibles indeterminaciones que pueden aparecer, ya que tienen un método propio de resolución:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 1^{\infty}.$$

Otro tipo de «indeterminaciones» es $0 \cdot \infty$, pero únicamente requiere de una reconfiguración de la función para que el límite resulte una indeterminación del tipo ∞/∞ o $0/0$:

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^x} = \infty \cdot \frac{1}{e^\infty} = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}.$$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Se da en funciones racionales y los límites cuando $x \to x_0$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), de numerador y denominador, son infinito. Para resolver la indeterminación existen dos maneras:

- **Caso 1.** Numerador y denominador son polinomios

  Se dividen todos los monomios por el de mayor grado, o lo que es lo mismo, cuando $x \to \pm\infty$ se resuelve eligiendo únicamente el monomio de mayor grado tanto en el numerador como en el numerador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + \cdots}{b_1x^n + b_2x^{n-1} + \cdots} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m}{b_1x^n}$$

- **Caso 2.** Numerador (y/o) denominador no es un polinomio

  Se aplica la regla de L'Hôpital, es decir, se derivan el numerador y el denominador por separado tantas veces como sea necesario hasta que desaparezca la variable *x* de uno de ellos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}(\text{indet}) = \lim_{x\to\infty} \frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

- **Ejemplo.** La solución de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$ es 1.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{\infty}{\infty}\ (\text{indet}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

Se da en funciones racionales y los límites cuando $x \to x_0$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), de numerador y denominador, son cero. Para resolver la indeterminación existen dos maneras:

- **Caso 1.** Numerador y denominador son polinomios

  Se factorizan numerador y denominador para simplificar, ya que al menos tienen uno en común:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{a_1x^m+\cdots}{b_1x^n+\cdots} = \frac{0}{0}(\text{indet}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{(x-x_1')(x-x_2')\dots(x-x_n')}$$

- **Caso 2.** Numerador y/o denominador no son polinomios

  Se aplica la regla de L'Hôpital, es decir, se derivan el numerador y el denominador por separado tantas veces como sea necesario hasta que desaparezca la variable *x* de uno de ellos.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}(\text{indet}) = \lim_{x\to x_0}\frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

- **Ejemplo.** La solución de $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ es 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}\ (\text{indet}) = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

Indeterminación $\infty - \infty$

Se da en límites, cuando $x \to x_0$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), de restas de funciones irracionales y polinómicas, pero también pueden aparecer en las funciones racionales. Para resolver la indeterminación existen dos maneras:

- **Caso 1.** Numerador y denominador son polinomios

  Se hace el mínimo común múltiplo:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{S(x)}\right] = \infty - \infty\ (\text{indet}) = \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)S(x) - R(x)Q(x)}{Q(x)S(x)}$$

- **Caso 2.** Una de las dos funciones es irracional

  Se multiplica y divide por el conjugado de la resta:

$$\lim_{x\to\infty}[P(x)-Q(x)] = \infty-\infty\ (\text{indet}) = \lim_{x\to\infty}\frac{[P(x)-Q(x)][P(x)+Q(x)]}{P(x)+Q(x)}$$

- **Ejemplo.** La solución de $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$ es ∞.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x) = \infty-\infty\ (\text{indet}) = \lim_{x\to\infty}(x^2-2x)\frac{x^2+2x}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-(2x)^2}{x^2+2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to\infty}x^2 = \infty$$

Indeterminación 1^∞

Se da en funciones potenciales-exponenciales y para resolver el límite, el método más fácil es el siguiente:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = 1^\infty\ (\text{indet}) = e^{\lim_{x\to\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

Que es la consecuencia de la definición del número de Euler ($e = 2{,}718281828\ldots$):

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = 1^\infty(\text{indet}) = \lim_{x\to a}\left[\left[1+\frac{1}{h(x)}\right]^{\frac{h(x)}{h(x)}}\right]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[\left[1+\frac{1}{h(x)}\right]^{h(x)}\right]^{\frac{g(x)}{h(x)}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]}$$

- **Ejemplo.** La solución de $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$ es e^{-6}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \mathbf{1}^\infty\ (\text{indet}) = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-2}{x+1}-1\right](2x+3)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3(2x+3)}{x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{x}} =$$

$$= e^{-6}$$

Asíntotas

Las asíntotas son líneas rectas a las que se acerca la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$ que anula un denominador (vertical) o $x \to \pm\infty$ (horizontal y oblicua).

- **Asíntota vertical**

  Es el valor que anula al denominador de una función racional después de simplificarla ($x_0 \in \mathbb{R}$). Gráficamente se representa como una línea recta vertical, es decir, paralela al eje de ordenadas (o eje OY), y como no es una función, analíticamente se escribe como:

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$$

  Los límites laterales (L_1,L_2) tienden a $\pm\infty$ y no tienen por qué coincidir (Figura 1.4.5).

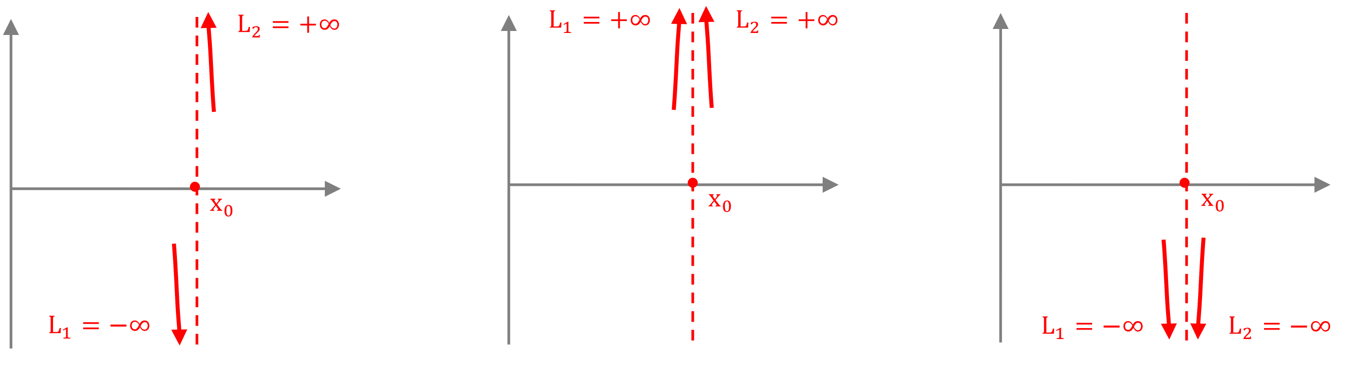


Figura 1.4.5. Tres posibles combinaciones de los límites laterales en una asíntota vertical.

- **Ejemplo.** La función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

Paso 1. Igualando el denominador a cero se tiene que:

$$\mathrm{x} - 1 = 0,$$

$$\mathrm{x} = 1.$$

Paso 2. Si se quiere graficar, se calculan los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

- **Asíntota horizontal**

  Es el valor $L \in \mathbb{R}$ de la coordenada y resultante del $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, que analíticamente se denota como:

$$\mathrm{y = L}$$

  Gráficamente es una recta horizontal, es decir, una recta paralela al eje de abscisas (o eje OX) y las ramas infinitas (cuando $\mathrm{x} \to \pm\infty$) se aproximan a L, ya sean los dos o solo uno de ellos (entonces el otro valdrá ±∞) (Fig. 1.4.6). No puede ser cortada por $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$, pero sí en valores intermedios de $x \in \mathbb{R}$.

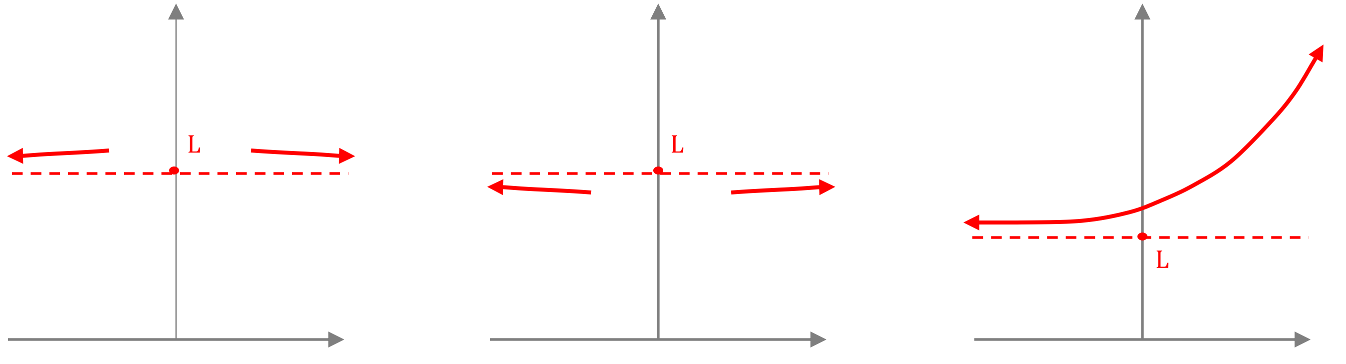


Figura 1.4.6. Tres posibles combinaciones posibles de las ramas infinitas en una asíntota horizontal.

- **Ejemplo.** La función $f(x) = e^x$ tiene una asíntota horizontal en $\mathrm{y} = 0$.

Paso 1. Cálculo de los límites infinitos (ramas infinitas):

$$\mathrm{y} = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} \mathrm{e^x} = \infty,$$

$$\mathrm{y} = \lim_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{e^x} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Paso 2. $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ para la rama de $x \to -\infty$

- **Asíntota oblicua**

  Valor del cociente de una función racional de dos polinomios siempre y cuando el grado del polinomio del numerador sea igual al del denominador más uno:

$$y = mx + n \quad (m \neq 0)$$

donde

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$$

Gráficamente es una recta oblicua (Figura 1.4.7).

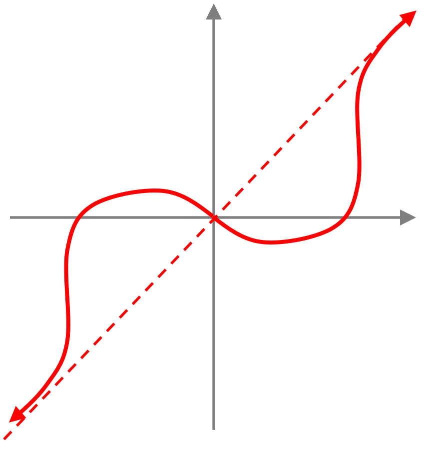


Figura 1.4.7. Ejemplo de una asíntota oblicua cortada por la función.

- **Nota.** Si existe la asíntota horizontal, entonces no existe la oblicua, y viceversa.

- **Ejemplo.** La función $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$ una asíntota oblicua en $y = 2x$

Paso 1. Cálculo de la pendiente:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2\,.$$

Paso 2. Cálculo de la ordenada en el origen:

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Paso 3. f(x) tiene una asíntota oblicua en y = 2x.

1.4.2. Funciones continuas

Continuidad de una función en un punto $x = x_0$

Una función $f(x)$ es continua cuando se puede graficar sin levantar el lápiz del papel, es decir, cuando cumple las tres condiciones siguientes para un punto determinado $x_0 \in \mathbb{R}$:

1. Existe la función en el punto de estudio x_0: $\exists\ f(x_0)$
2. Existe el límite en el punto de estudio x_0: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
3. La función en x_0 es igual al límite cuando $x \to x_0$: $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Si no se cumple alguna de las tres condiciones entonces $f(x)$ es discontinua en el punto x_0, sin embargo, se pueden cumplir parcialmente, por eso se puede hablar de continuidad lateral en los siguientes casos (Figura 1.4.8):

- La función $f(x)$ es continua por la izquierda en x_0 cuando $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
- La función $f(x)$ es continua por la derecha en x_0 cuando $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

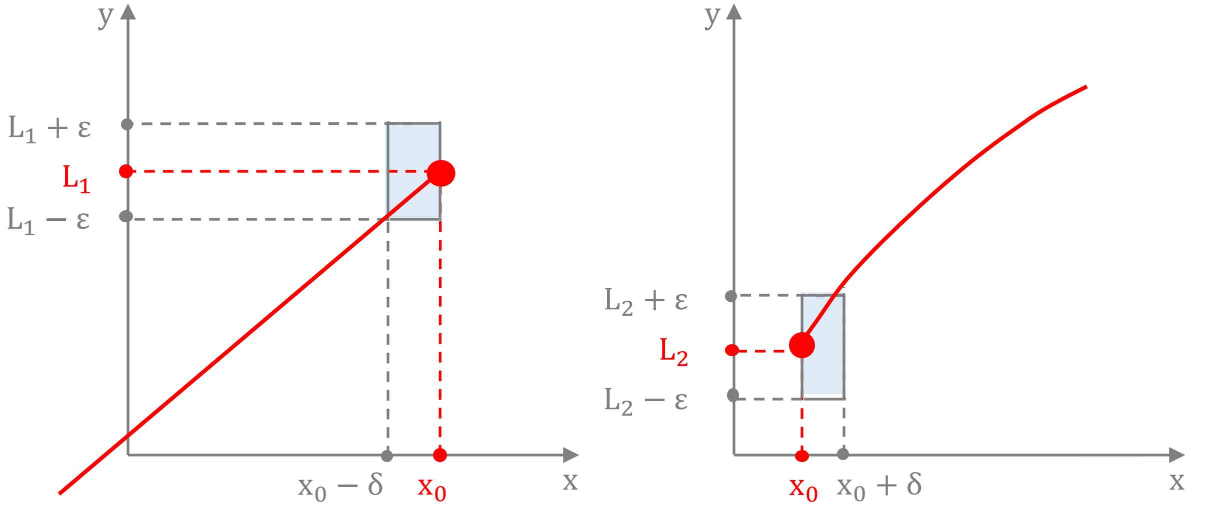


Figura 1.4.8. Dos casos de continuidad lateral para dos funciones cualquiera.

Propiedades

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0, entonces:

- $f(x) + g(x)$ es continua en x_0.
- $f(x) \cdot g(x)$ es continua en x_0.
- $f(x)/g(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

Si $f(x)$ es continua en x_0 y $\mathrm{g}(x)$ es continua en $\mathrm{f}(x_0)$, entonces:

- $f(x) \circ \mathrm{g}(x)$ es continua en x_0.

Continuidad de una función en un intervalo $I = [a, b]$

Una función $f(x)$ es continua en un intervalo $I \in \mathbb{R}$ cuando es continua en $\forall x_0 \in I$.

Teorema de Bolzano

Si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y
- $f(a) \cdot f(b) < 0$,

entonces existe al menos un punto con abscisa $c \in (a, b)$ en el que $f(x)$ corta al eje OX (Figura 1.4.9):

$$\mathrm{f(c)} = 0.$$

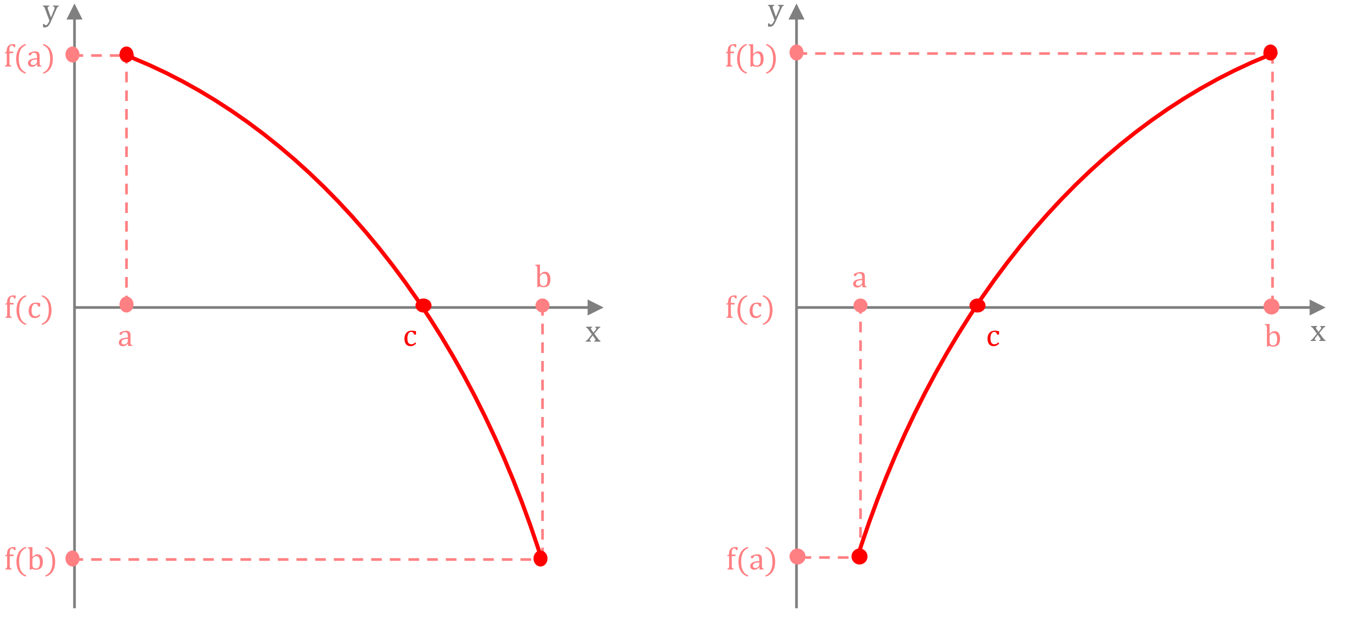


Figura 1.4.9. Representación gráfica del teorema de Bolzano para una función cualquiera.

Para calcular el punto de corte con el eje OX se puede sustituir la x por c, siempre que $f(x)$ no sea complicada, ya que en ese caso es mejor usar el método de la bisección para hallar una aproximación de la solución de la ecuación $\mathrm{f(c)} = 0$.

- **Ejemplo.** La parábola $f(x) = x^2 - 4$ definida en $[0,4]$ corta al eje OX en el punto $(2,0)$.

Paso 1. Continuidad:

f(x) es continua en $[0,4]$ porque lo es en $\mathbb{R}$.

Paso 2. Cálculo de las imágenes de los extremos:

$f(1) = -3$ y

$f(4) = 12$,

por tanto, $f(1) \cdot f(3) < 0$

Paso 3. Aplicación del teorema de Bolzano:

Como se cumplen las dos condiciones, se puede asegurar que existe al menos un punto donde la función corta al eje OX en el intervalo dado, es decir, $\exists c \in (0,4)$ tal que $f(c) = 0$.

Paso 4. Cálculo de la coordenada del punto:

Al ser una función sencilla, se puede calcular el valor sustituyendo las x por c en la función y resolver la ecuación $f(c) = 0$. Entonces:

$f(c) = c^2 - 4 = 0$,

$c = \pm\sqrt{4}$,

$c = 2 \in (0,4)$.

Teorema de los valores intermedios

Si se cumple que:

- $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y
- $f(a) < d < f(b)$ o $f(a) > d > f(b)$,

entonces existe al menos un valor de $x \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Método de la bisección

Para calcular una solución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$, $f(x)$ debe cumplir con las condiciones del teorema de Bolzano para un intervalo determinado, es decir, $f(x)$ debe ser continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces se procede de la siguiente manera:

Paso 1. Cálculo del punto medio del intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$:

$$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}}{2}$$

Paso 2. Evaluación de c en la función, por lo que existen tres posibilidades:

- Si $f(c) = 0$, c es la solución exacta.
- Si $f(c) \cdot f(a) < 0$, se puede concluir que existe al menos una solución en el intervalo (a, c).
- Si $f(c) \cdot f(b) < 0$, se puede concluir que existe al menos una solución en el intervalo (c, b).

Como toda aproximación lleva asociado un error, en este caso se puede relacionar el error cometido (ε) con el número de iteraciones a realizar (n) de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{b} - \mathrm{a}}{2^{\mathrm{n}}} < \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{n} > \log_2\left(\frac{\mathrm{b} - \mathrm{a}}{\varepsilon}\right)$$

$$\mathrm{n} > \frac{\ln\left(\frac{\mathrm{b} - \mathrm{a}}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

- **Ejemplo.** Para $f(x) = e^{-x} - x$, la solución aproximada para $\mathrm{f}(x) = 0$ en $[0,1]$ tras tres iteraciones, y mediante el método de bisección, es 0,625.

Paso 1. Cálculo del punto medio (c_1) del intervalo $[0,1]$ (Figura 1.4.10):

$$\mathrm{c}_1 = \frac{0 + 1}{2} = 0{,}5$$

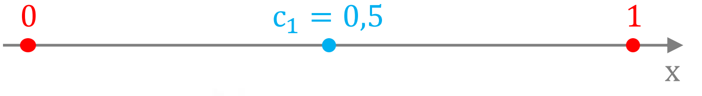


Figura 1.4.10. Representación gráfica de c_1 en el intervalo $[0,1]$.

Paso 2. Evaluación de $c_1 = 0{,}5$ en la función:

- $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$,
- $f(1) = e^{-1} - 1 = 1/e - 1 < 0$ y
- $f(0{,}5) = e^{-0{,}5} - 0{,}5 = 1/\sqrt{e} - 0{,}5 = 0{,}1065 > 0$,

por tanto, $c_1 = 0{,}5$ sustituye a $a = 0$, ya que $f(0{,}5) \cdot f(1) < 0$.

Paso 3. Cálculo del punto medio (c_2) del intervalo $[0{,}5; 1]$ (Figura 1.4.11):

$$c_2 = \frac{0{,}5 + 1}{2} = 0{,}75$$

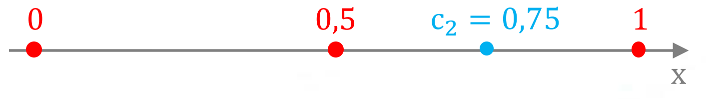


Figura 1.4.11. Representación gráfica de c_2 en el intervalo $[0{,}1]$.

Paso 4. Evaluación de $c_2 = 0{,}75$ en la función:

- $f(0{,}5) = e^{-0{,}5} - 0{,}5 = 1/\sqrt{e} - 0{,}5 > 0$,
- $f(1) = e^{-1} - 1 = 1/e - 1 < 0$ y
- $f(0{,}75) = e^{-0{,}75} - 0{,}75 = -0{,}2776 < 0$,

por tanto, $c_2 = 0{,}75$ sustituye a b= 1, ya que $f(0{,}5) \cdot f(0{,}75) < 0$.

Paso 5. Cálculo del punto medio (c_3) del intervalo $[0{,}5; 0{,}75]$ (Figura 1.4.12):

$$c_3 = \frac{0{,}5 + 0{,}75}{2} = 0{,}625$$

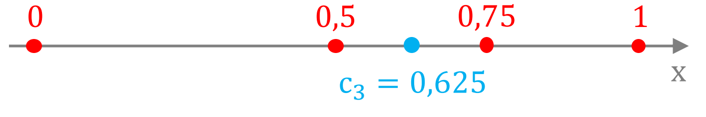


Figura 1.4.12. Representación gráfica de c_3 en el intervalo $[0{,}1]$.

La solución aproximada después de tres iteraciones es $x = 0{,}625$, o lo que es lo mismo, el punto de corte aproximado de la función con el eje OX es el $(0{,}625; 0)$.

1.5. Sucesiones y series de funciones

1.5.1. Sucesiones de funciones

La sucesión de una función, con definida en el dominio $D \subset \mathbb{R}$, es una aplicación que asigna a cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a efectos comparativos es lo mismo que la sucesión de números reales ya definida en la Sección 1.2 (el término general es una función que depende de la variable n y aparecen las operaciones de suma/resta, multiplicación/división y potenciación/exponenciación), pero con la inclusión de la variable x (y las funciones trigonométricas y logarítmicas):

$$\{f_n(x)\} = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)\}$$

Sirvan como ejemplos las sucesiones funcionales $\{1/n^2\}$ para $x \in \mathbb{R}$ y $\{\mathrm{sen}(nx)\}$ para $x \in [0,1]$, cuyas secuencias de términos correspondientes son $\{1,\ 1/4,\ 1/9,\ 1/16, \dots, 1/n^2\}$ y $\{\mathrm{sen}(x), \mathrm{sen}(2x), \mathrm{sen}(3x), \dots, \mathrm{sen}(nx)\}$.

Convergencia puntual

La sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente a la función límite $f(x)$ en D si $\forall x \in D$ se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

La convergencia es absoluta si todos los límites son iguales para $\forall x \in D$.

- **Ejemplo.** La sucesión $f_n(x) = x^n$ definida en $x \in [0,1]$ converge puntualmente (Figura 1.5.1).

Paso 1. Evaluación de $f_n(x)$ en los extremos y el interior del intervalo:

- $x = 0$: $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$
- $0 < x < 1$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ $(\|x\| < 1)$
- $x = 1$: $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

Como son números reales, la sucesión funcional converge puntualmente.

Paso 2. La convergencia puntual de $f_n(x)$ se define como la función límite $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

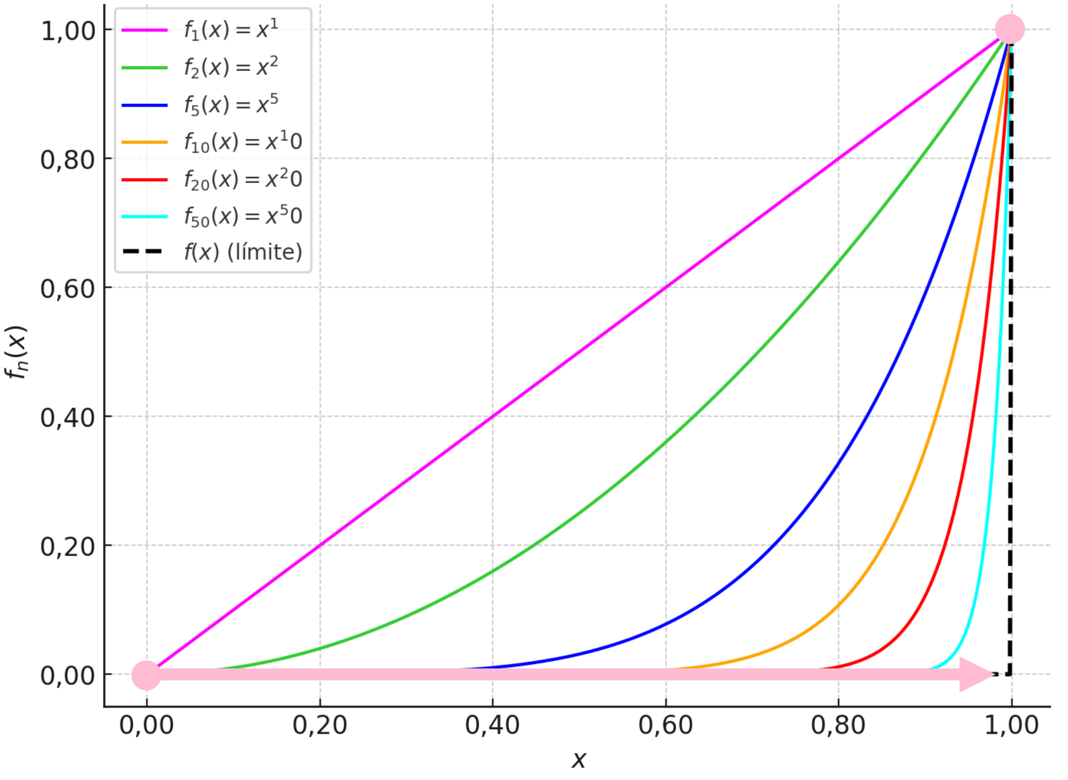


Figura 1.5.1. Convergencia de la sucesión funcional $f_n(x) = x^n$.

Convergencia uniforme

La sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente en D a la función límite $f(x)$ si:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D}\{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$$

Esto significa que, a partir de un determinado $n \in \mathbb{N}$, todas las funciones $f_n(x)$ están suficientemente cerca de $f(x)$ en $x \in D$ y con la misma precisión ($\varepsilon = 0$).

- **Nota.** Si $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente en $x \in D$, entonces converge puntualmente.

- **Ejemplo.** La sucesión$f_n(x) = x^n$ definida en $[0,1]$ no converge uniformemente.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \{|f_n(x) - f(x)|\} \neq 0$$

ya que cerca de $x = 1$, $f_n(x)$ tarda más en acercarse al 1 cuanto mayor es n.

▪ **Ejemplo.** La sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{n}$ definida en x ∈ [0,1] converge puntual y uniformemente (Figura 1.5.2).

Paso 1. Evaluación de $f_n(x)$ en los extremos y el interior del intervalo:

- x = 0: $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0/n = 0$
- 0 < x < 1: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x/n = 0$ $(\|x\| < 1)$
- x = 1: $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$

Como son cero todos los resultados, $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente.

Paso 2. La convergencia puntual de $f_n(x)$ se define como la función límite $f(x)$:

$$f(x) = 0, \qquad x \in [0,1].$$

Paso 3. Para la convergencia uniforme debe cumplirse:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0.$$

Como $f_n(x) = x/n$ y $f(x) = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \{|x/n - 0|\} = \sup_{x\in[0,1]} \{|0 - 0|\} = 0,$$

entonces, $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente.

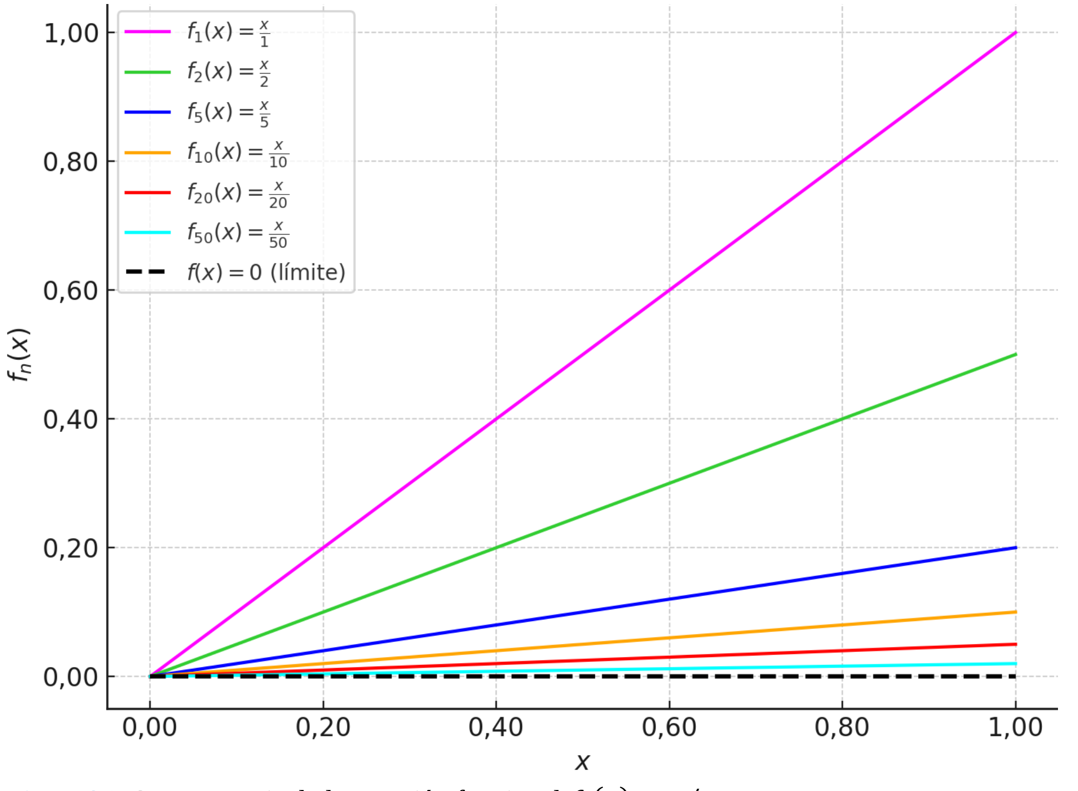


Figura 24. Convergencia de la sucesión funcional $f_n(x) = x/n$.

1.5.2. Series de funciones

Al igual que con la serie de número reales (Sección 1.3) la sucesión $\{S_n(x)\}$ tiene por términos las sumas parciales de los n-términos de la sucesión funcional $\{f_n(x)\}$:

$$S_1(x) = f_1(x)$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$
$$\dots$$
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,.$$

Entonces, el par $(\{S_n(x)\},\{f_n(x)\})$ es una serie de funciones que se define como la suma de los infinitos términos de $f_n(x)$ definida en $x \in D$:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,.$$

Convergencia puntual

La serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente en $x \in D$ a la función suma $S(x)$ si la sucesión funcional $\{S_n(x)\}$ converge puntualmente en $x \in D$, es decir, si se cumple que:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,.$$

La convergencia es absoluta si todos los valores son iguales para $\forall x \in D$.

- **Nota.** Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente en $x \in D$, entonces converge puntualmente en $x \in D$.

▪ **Ejemplo.** La serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ definida en $(-1,1)$ converge puntualmente (Fig. 1.5.3).

Paso 1. La suma de los infimitos términos para una razón $\|x\| < 1$ es:

$$\mathrm{S(x)} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{x^n} = 1 + \mathrm{x} + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-\mathrm{x}}.$$

Paso 2. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ definida para $\forall x \in (-1,1)$ converge puntualmente porque:

$$\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x^n} = \frac{1-\mathrm{x^{n+1}}}{1-\mathrm{x}}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1-\mathrm{x^{n+1}}}{1-\mathrm{x}} = \frac{1-0}{1-\mathrm{x}} = \frac{1}{1-\mathrm{x}} = \mathrm{S(x)}$$

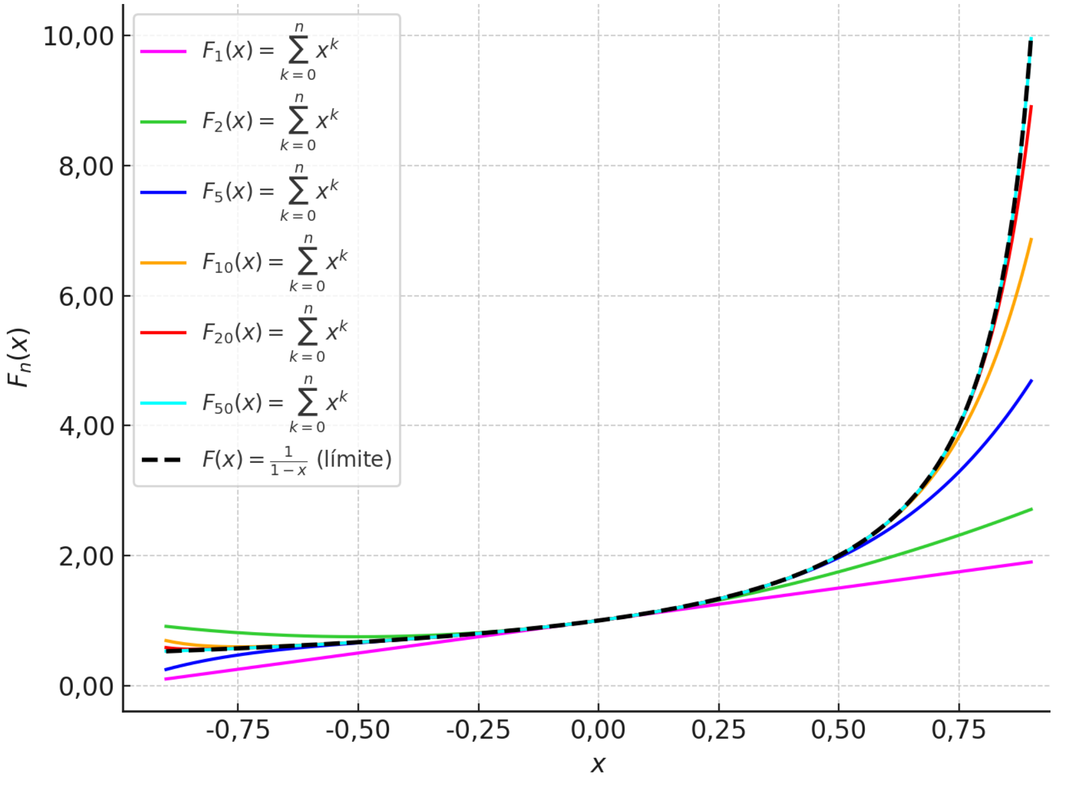


Figura 1.5.3. Convergencia de la sucesión funcional $\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{x^n}$.

Convergencia uniforme

La serie funcional $\sum_{n=1}^{N} \mathrm{f_n(x)}$ converge uniformemente en D hacia la función suma $S(x)$ si la sucesión funcional $\{S_n(x)\}$ converge uniformemente en $x \in D$ hacia $S(x)$:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{D}} \{|\mathrm{S_n(x)} - \mathrm{S(x)}|\} = 0.$$

Criterio de de la mayorante (Weierstrass)

Dada una sucesión de funciones definidas en D $\{f_n(x)\}$ y dada una sucesión $\{M_n\}$ de números de forma que

$$|\mathrm{f_n(x)}| \leq \mathrm{M_n(x)}, \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{x} \in \mathrm{D}.$$

Entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$ converge, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absoluta y uniformemente.

- **Ejemplo.** La serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \operatorname{sen}(nx)$ definida en $[0, \pi]$ converge uniformemente (Figura 1.5.4).

Paso 1. Aplicando el criterio de la mayorante (Weierstrass), se tiene que $|\mathrm{f_n(x)}| \leq \mathrm{M_n(x)}$ para $\forall x \in [0, \pi]$ y $n \in \mathbb{N}$, por tanto, como $\operatorname{sen}(nx) \in [-1,1]$:

$$|\mathrm{f_n(x)}| = \left| \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}^2} \operatorname{sen}(\mathrm{nx}) \right| \leq \frac{1}{\mathrm{n}^2} = \mathrm{M_n(x)},$$

Paso 2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x) = 1/n^2$ converge puntual y uniformemente porque no depende de x, ya que al ser una serie-p con exponente $p = 2 > 1$. Probada la convergencia de la mayorante $\mathrm{M_n(x)} = 1/n^2$, se puede afirmar que la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}(nx)/n^2$ converge uniformemente.

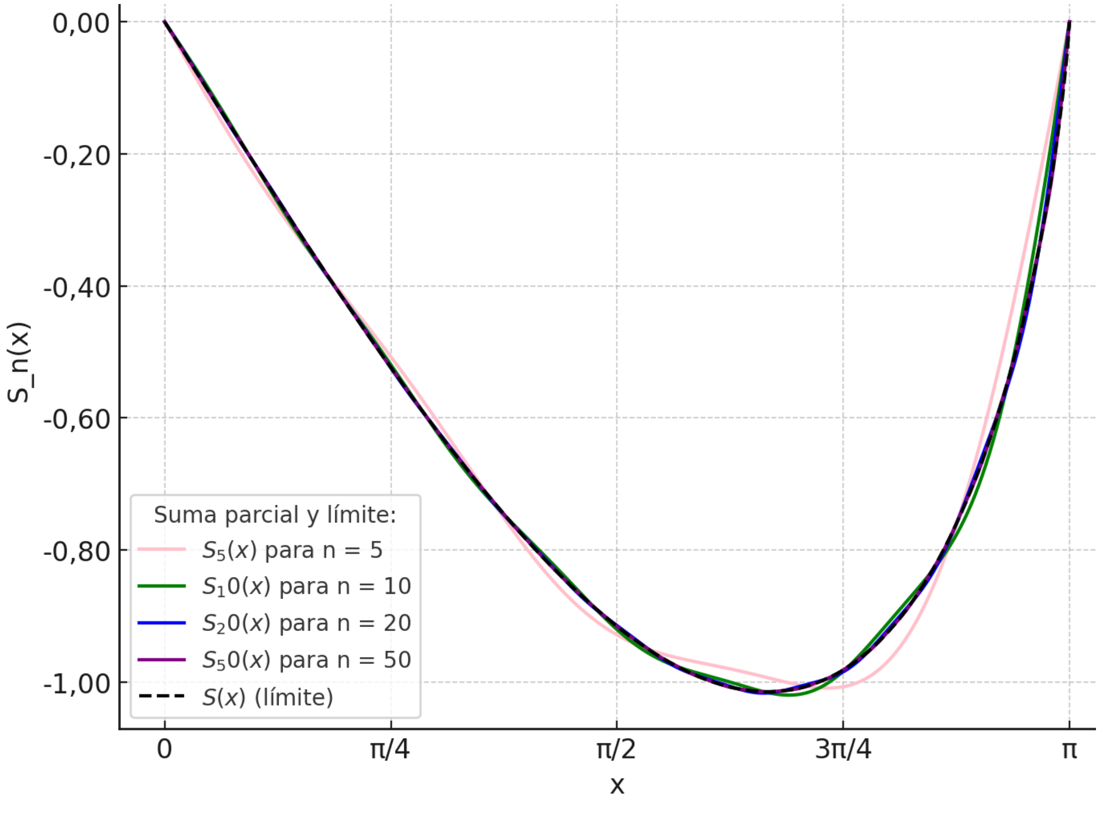


Figura 1.5.4. Convergencia de la sucesión funcional $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

1.5.2.1. Series de potencias

La serie de potencias es una serie centrada en un punto x_0 fijo con un coeficiente (constante) $\mathrm{a_n} \in \mathbb{R}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$):

$$\mathrm{a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n}$$

Las series de potencias quedan definidas cuando se conocen $\mathrm{x_0}$ y $\mathrm{a_n}$.

Radio de convergencia

El radio de convergencia (γ) de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, indica el intervalo de valores de x entorno al centro x_0 para el cual la serie converge puntualmente, es decir, cuando:

$$|\mathrm{x - x_0}| < \gamma.$$

Si la distancia es mayor que el radio, la serie diverge, y si es igual, el comportamiento puede variar.

Criterio de la raíz

Dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ y sea $\lim\limits_{\mathrm{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\mathrm{a_n}|} = \mathrm{S}$:

- Si $S \in (0, \infty)$ → $\gamma = 1/S$
- Si $S = 0$ → $\gamma = 1/S = +\infty$
- Si $S = \infty$ → $\gamma = 1/S = 0$

Se usa cuando la raíz n-ésima de a_n es relativamente fácil de calcular.

- **Ejemplo.** La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ tiene un radio de convergencia $\gamma = 1$.

Paso 1. Cálculo del límite:

$$\mathrm{S = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2\ln(n)}{n}} = e^0 = 1}$$

Paso 2. Cálculo del radio de convergencia:.

$$\gamma = \frac{1}{S} = \frac{1}{1} = 1$$

Criterio del cociente

Dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y sea $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = S$:

- Si $S \in (0,\infty) \quad \rightarrow \quad \gamma = 1/S$
- Si $S = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = 1/S = +\infty$
- Si $S = \infty \quad \rightarrow \quad \gamma = 1/S = 0$

Se suele usar en series geométricas o con términos factoriales.

▪ **Ejemplo.** La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$ tiene un radio de convergencia $\gamma = \infty$.

Paso 1. Cálculo del límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(n+1)!}{1/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Paso 2. Cálculo del radio de convergencia:.

$$\gamma = \frac{1}{0} = \infty$$

Lo que significa que la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.