Tema 1
La tecnología

INFO@ADEFACIL.COM

En este curso vamos a estudiar la teoría de la producción que a diferencia de la teoría del consumidor estudiada el curso pasado es más sencilla ya que el resultado de un proceso de producción generalmente es observable mientras que el resultado del consumo , lo que llamábamos **utilidad** , no lo es.

En este capítulo vamos a estudiar las restricciones tecnológicas con las que se enfrenta el empresario a la hora de decidir la forma en que combinará los factores productivos para obtener el producto.

Introduciremos una primera definición

Función de producción, es la relación que existe entre la cantidad utilizada de factores (**capital y trabajo**) en el proceso de producción y la cantidad máxima de producto que se puede obtener
Matemáticamente podemos formalizarla de la siguiente manera

$$Q = f(k, L)$$

A partir de la función de producción podemos saber cómo variará la producción si se alteran los factores de producción.

Tenemos que hacer una observación , todo este proceso productivo se realiza en un periodo de tiempo . Distinguiremos entre **el corto plazo y el largo plazo.**

El largo plazo será el periodo mínimo de tiempo que se necesita para alterar o cambiar todos los factores productivos, siendo **el corto plazo** el periodo de tiempo en el que algún factor es fijo.

$K=5 \quad L=6 \Rightarrow Q = \ldots ?$

$K=7 \quad L=8 \Rightarrow Q = \ldots ?$

Variaciones de un factor

En nuestro proceso productivo consideraremos, por comodidad, que sólo intervienen dos factores a los que llamaremos **capital y trabajo.**

$k \longrightarrow$ **Capital**

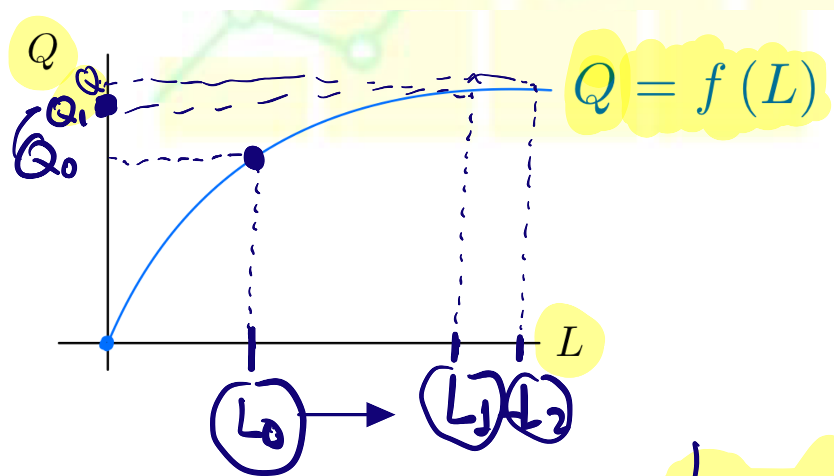
$L \longrightarrow$ **trabajo**

$$Q = f\left(k, L\right)$$

Si nos interesa la producción a corto plazo , periodo en el que consideraremos que el capital es fijo y que el trabajo puede variar libremente . En este caso la función de producción será

$$\boxed{Q = f\left(L\right)} \quad ; \quad \boxed{K = K_0}$$

Una de las ventajas de esta consideración es que podemos representar la función de producción en un gráfico



Los puntos situados sobre la curva representan las cantidades máximas de producto que se pueden obtener aplicando Ko de capital y L de trabajo

Ley de Rendimientos decrecientes

Suponiendo K = fijo

$$Q = k \cdot L$$

Veamos la gráfica de dos funciones de producción en las que sólo cambiará la cantidad de capital

$$Q = 4L \longrightarrow k = 4$$

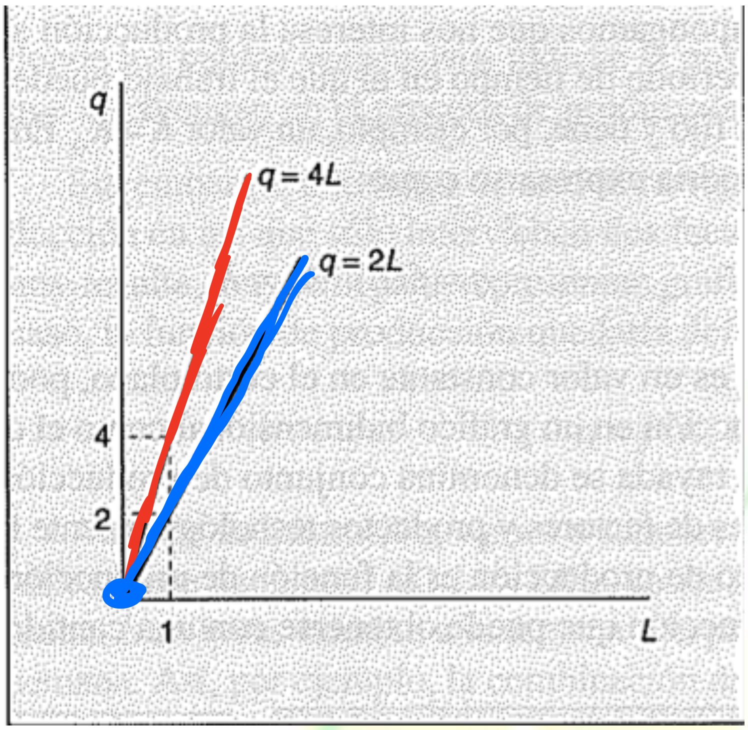
$$Q = 2L \longrightarrow k = 2$$

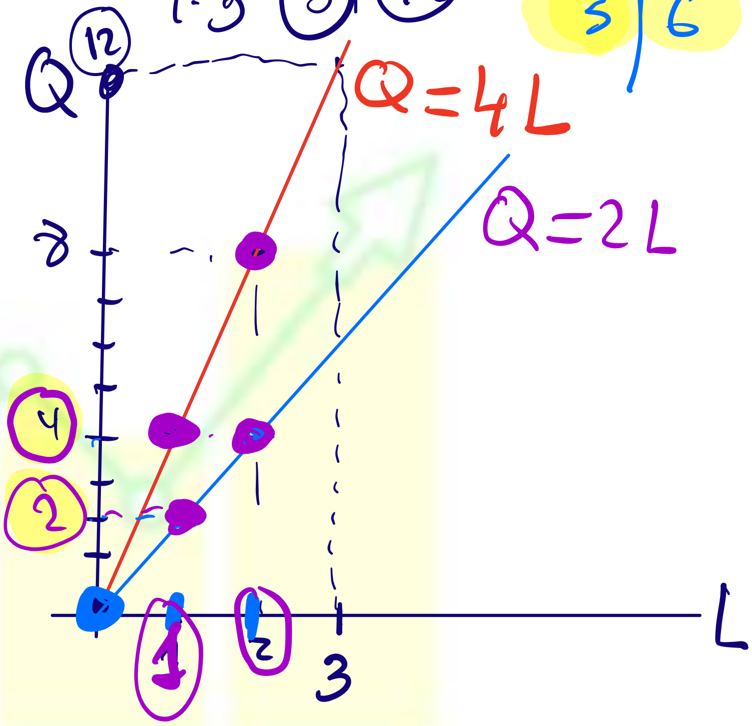
$Q = 4 \cdot L$

	L	Q
$4\cdot 0$	0	0
$4\cdot 1$	1	4
$4\cdot 2$	2	8
$4\cdot 3$	3	12

$Q = 2 \cdot L$

L	Q
0	0
1	2
2	4
3	6





Producto total , marginal y medio

Recordad que la función de producción relacionaba la cantidad de producción obtenida con la cantidad de factores empleada .
Quizás nos pueda interesar cómo va a cambiar la producción obtenida si aumentamos la cantidad de uno de los factores en una unidad . De eso se encarga la **Productividad marginal.**

La productividad marginal de un factor es la cantidad adicional de producto que se puede obtener al usar una unidad más de ese factor .

Supongamos que tenemos una función de producción y que estamos usando las siguientes cantidades de factores

$$Q = 3k + 2L \qquad Q = \underbrace{3K}_{} + \underbrace{2L}_{}$$

$$k = 4 \qquad L = 6$$

$$Q = 3.4 + 2.6 = 24$$

¿ Cómo cambiará nuestra producción si aumentamos en una unidad el factor trabajo ?

$$k = 4 \qquad L = 7$$

$$Q = 3.4 + 2.7 = 26$$

$$Q_0 = 24$$

$$Q_1 = 26$$

$$\Delta Q = 26 - 24 = \boxed{2}$$

$$L = 6 \rightarrow L = 7 \Rightarrow \Delta Q_2 = 2$$

La producción ha aumentado en dos unidades , eso quiere decir que la productividad marginal del factor **trabajo** (que es el que ha cambiado) cuando **K=4** y **L=6** es 2

Matemáticamente **la productividad marginal** se indica de la siguiente manera

$$\frac{dQ}{dL} = Q_L \longrightarrow$$ Productividad marginal del trabajo

$$\frac{dQ}{dK} = Q_K \longrightarrow$$ Productividad marginal del capital

En nuestro ejemplo **la productividad marginal del trabajo** será

$$Q_L(4, 6) = 2$$

Y la productividad marginal del capital para esos valores de **K** y **L** será

$$Q_k(4, 6) = 3$$

$(4,6) \to (5,6)$

Eso quiere decir que si aumentamos en una unidad la cantidad del factor capital la producción total aumentará en tres unidades . Veamos que es cierto

$$Q = 3.5 + 2.6 = 27 \qquad Q = 3.4 + 2.6 = 24$$

$$\Delta Q = 27 - 24 = 3 \Rightarrow Q_K(\underset{5}{4}, 6) = 3$$

Tenemos que hacer la siguiente observación sobre **la productividad marginal** y es que ésta depende de la cantidad de factores que se esté utilizando en ese momento. Veamos el siguiente ejemplo

$$Q = 5 \cdot k \cdot L$$ Cobb-Douglas

$$k = 4 \; ; \quad L = 6$$

$$Q = 5.4.6 = 120$$

Veamos cómo cambiará nuestra producción si aumentamos en una unidad el factor trabajo.

$L=6 \rightarrow L=7$

$$Q = 5.4.7 = 140$$

$\Delta Q = 140 - 120 = 20$

Ha aumentado en 20 unidades , pues esa es la **productividad marginal del trabajo cuando K= 4 y L= 6.**

$Q_L = 20$ $\quad Q_L(4,6) = 20$

Otra manera de calcular la **productividad marginal del trabajo** será con la derivada

$Q = 5KL$

$$Q_L = \frac{dQ}{dL} = 5k$$

$Q_L = \frac{dQ}{dL} = 5K$

$$Q_L(4, 6) = 5.4 = 20$$

$Q_L(\overset{K}{4}, \overset{L}{6}) = 5 \cdot 4 = 20,$

La Productividad media de un factor es el cociente entre la cantidad total producida y la cantidad usada de dicho factor

Matemáticamente se puede expresar como

$$PMeL = \frac{Q}{L}$$

$$PMeK = \frac{Q}{k}$$

$Q = 5KL$

$K = 2$

$L = 4$

$Q(2,4) = 5 \cdot 2 \cdot 4$

$Q = 40$

$$PMeL = \frac{40}{4} = 10$$

$$PMek = \frac{40}{2} = 20$$

Relaciones entre las curvas de producto total , medio y marginal .

Primero resaltaremos dos puntos importantes desde un punto de vista económico y que suelen caer con frecuencia en los exámenes

- **Optimo de explotación (optimo técnico) :** Es el máximo de la productividad media del trabajo . Podemos decir que es el número de trabajadores (**cantidad de factor trabajo**) en que éstos operan con máxima eficiencia, aquí los trabajadores se relacionan de manera que son más productivos .

Máximo de producción (maximo tecnico) : Es la cantidad de trabajadores (**cantidad de factor trabajo)** para el que se obtiene la máxima cantidad de producción

Veamos a modo de ejemplo un ejercicio del examen del curso 2021-2022 Febrero A

PROBLEMA 4. Dada la siguiente función de producción $x = 5\left(-\frac{L^3}{3} + L^2 + 2L\right)$ donde x es la cantidad producida y el trabajo "L" el único factor variable.

K= Fijo

19. Determinar la cantidad aplicada de trabajo que permite alcanzar el óptimo técnico.

a) L= 2 b) L= 1,5 c) L= 2,73 d) L= 3

20. Determinar la cantidad aplicada de trabajo que permite alcanzar el máximo técnico.

a) L= 2 b) L= 1,5 c) L= 2,73 d) L= 3

óptimo técnico $\Rightarrow$ $\boxed{\text{máximo}}$ PMeL

$$PMeL = \frac{Q}{L} = \frac{-5\frac{L^3}{3} + 5L^2 + 10L}{L} = \underbrace{-\frac{5}{3}\cdot L^2 + 5L + 10}_{PMeL}$$

Paco
INFO@ADEFACIL.COM
655474858

máximo PMeL ⇒ derivar PMeL

$PMeL = -\frac{5}{3}L^2 + 5L + 10$; $(PMeL)' = \frac{-10}{3}L + 5 = 0$

$-\frac{10}{3}L + 5 = 0 \Rightarrow \frac{-10}{3}L = -5$; $-10L = -15$

$\boxed{L = \frac{-15}{-10} = 1'5}$

$\boxed{L = 1'5}$ → nº trab alcanza óptimo técnico

$Q_T = 5\left(-\frac{1'5^3}{3} + 1'5^2 + 2.1'5\right) = 20'625$ total producto

$\frac{Q_T}{L} = \frac{20'625}{1'5} = 13'75$ más eficiente

(20) máx. técnico ⇒ máximo producción

$Q = 5\left(-\frac{L^3}{3} + L^2 + 2L\right) = -\frac{5}{3}L^3 + 5L^2 + 10L$

$Q' = \frac{-15}{3}L^2 + 10L + 10$; $Q' = -5L^2 + 10L + 10 = 0$

$L = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(-5)(10)}}{2(-5)} = \frac{-10 \pm \sqrt{300}}{-10}$

$\cancel{\frac{-10 + \sqrt{300}}{-10}}$

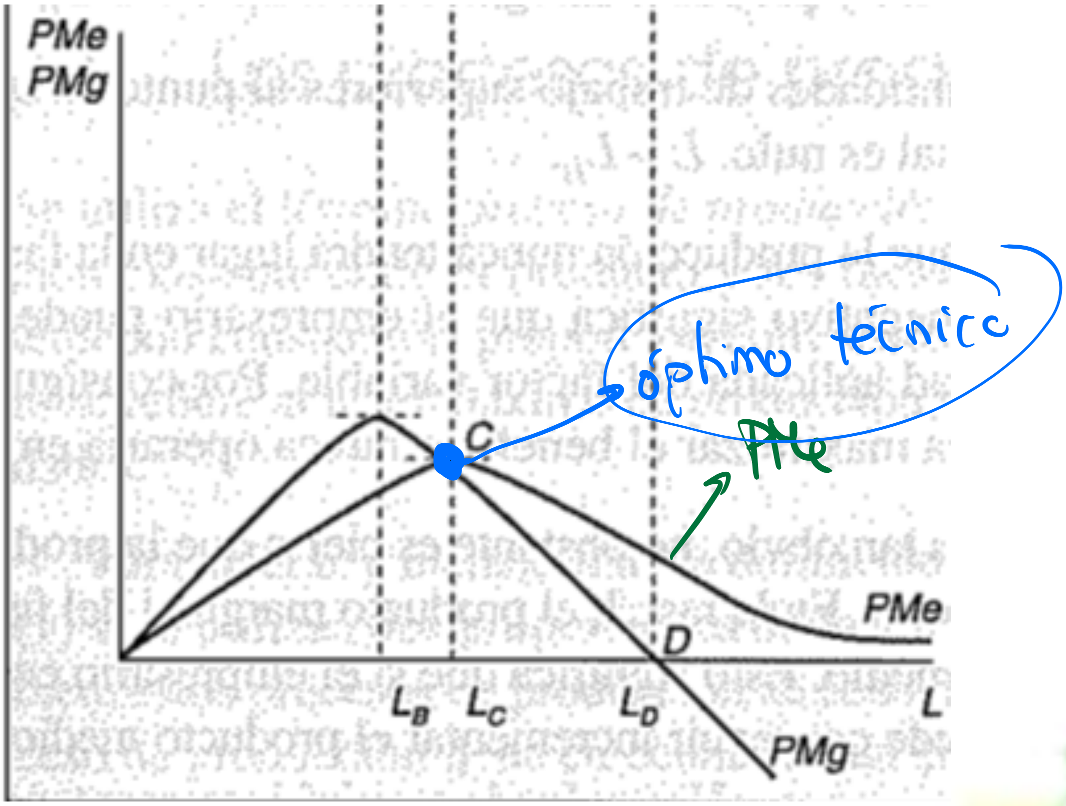
$\frac{-10 - \sqrt{300}}{-10} = 2'73$

$\boxed{L = 2'73}$

$Q = 5\left(-\frac{2'73^3}{3} + 2'73^2 + 2.73\right) =$

$Q = 30'65$

$PMe = \frac{Q}{L} = \frac{30'65}{...}$



Existe una relación muy importante entre la productividad marginal y la productividad media.
Si la productividad marginal es mayor que la productividad media entonces la productividad media va creciendo y cuando la productividad marginal sea menor que la productividad media entonces la productividad media va decreciendo .

Veamos un símil , supongamos las notas de una asignatura , la productividad marginal es como la nota del último examen realizado y la productividad media es la nota media de los exámenes .

PMgL = última nota

PMeL = nota media todos los exámenes menos el último

notas: **6,8, 10,8** **nota media=** $\frac{32}{4} = 8$

Supongamos que la nota de un quinto es de

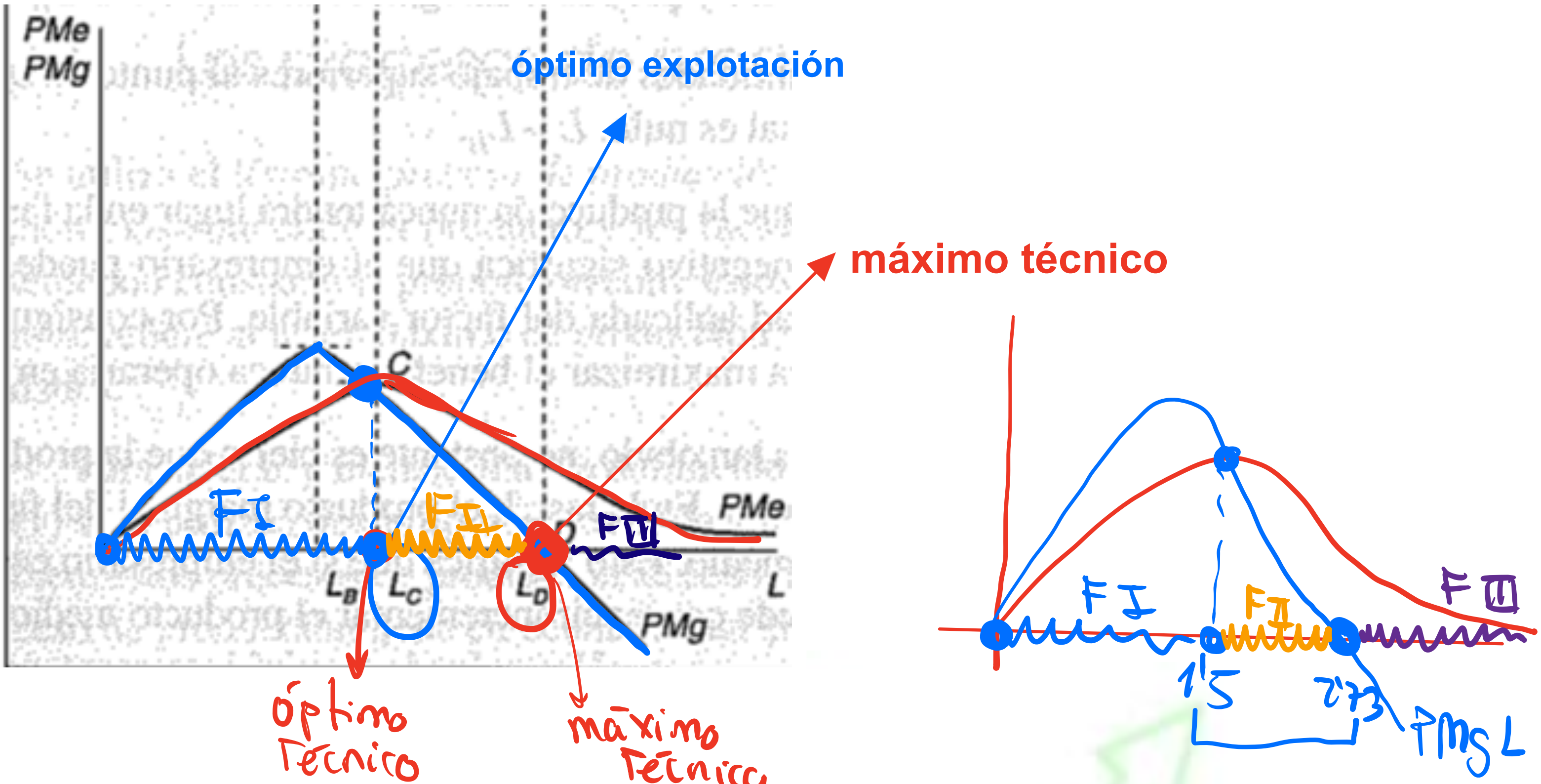
10

6, 8, 10, 8, 10 $\Rightarrow \frac{42}{5} = 8'4$

Supongamos que la nota de un quinto es de

7

6, 8, 10, 8, 7 $\frac{39}{5} = 7'8$



Una vez que tenemos claro la relación entre la propensión marginal y media vamos a distinguir tres tramos o fases en la producción.

Fase 1 . Cantidades de trabajo comprendida entre cero y el óptimo técnico.

Fase 2. Cantidades de trabajo comprendidas entre el optimo técnico y el valor en el que el producto marginal del trabajo es cero (máximo técnico)

Fase 3. Cantidades de trabajo superiores al punto en el que el producto marginal es cero.

En un capítulo posterior demostraremos que el número de trabajadores empleados por el empresario estará entre el óptimo técnico y el máximo técnico.

nº L [ópt téc - máx téc]

$\boxed{\text{nº L } [1'5 , 2'73]}$

Producción con dos factores variables

En el largo plazo todos los factores (**K** y **L)** son variables. Veremos cómo representar la tecnología cuando existen dos factores variables.

Usaremos el término **proceso de producción o actividad** para especificar la relación entre el producto obtenido y los factores necesarios para obtenerlo , de manera que se mantenga constante la relación entre los factores

K	L	q	K/L
1	3	5	1/3
2	6	10	1/3
3	9	15	1/3
4	12	24	1/3
5	15	28	1/3

$K/L = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Proceso A

K	L	q	K/L
3	1	5	3
6	2	10	3
9	3	15	3
12	4	24	3
15	5	28	3

Proceso B

$\frac{K}{L} = \frac{3}{1} = 3$

Procesos eficientes e ineficientes.

Un proceso será ineficiente cuando utilice una cantidad mayor de algún factor y no menos de los demás factores para producir la misma cantidad de producción.

	K	L	q	K/L
Proceso A	2	6	10	1/3
Proceso B	6	2	10	3
Proceso C	3	6	10	1/2
Proceso D	5	4	10	5/4

Para poder comparar procesos es necesario que todos se refieran al mismo volumen de producción.

Isocuantas.

Ahora veremos cómo representar la función de producción cuando los dos factores son variables. La manera de hacerlo será a través del mapa de **isocuantas**

$$f(K, L) = Q_0$$

Las **isocuantas** nos dice cómo se realiza el proceso de producción.

Vamos a ver algunos tipos de tecnologías y sus **isocuantas**

leontief

Tecnología de proporciones fijas

factores complementarios

Este tipo de tecnología se usa cuando solo hay una manera de combinar los factores para obtener el producto.

Supongamos que una empresa de autobuses para viajes de larga distancia debe tener dos conductores por cada autobús

$K \longrightarrow$ **autobús**

$L \longrightarrow$ **conductores**

1 autobús y 2 conductores
K L

La relación es de 2 conductores y 1 autobús

$$Q = \min\left\{\frac{L}{2}, \frac{k}{1}\right\}$$

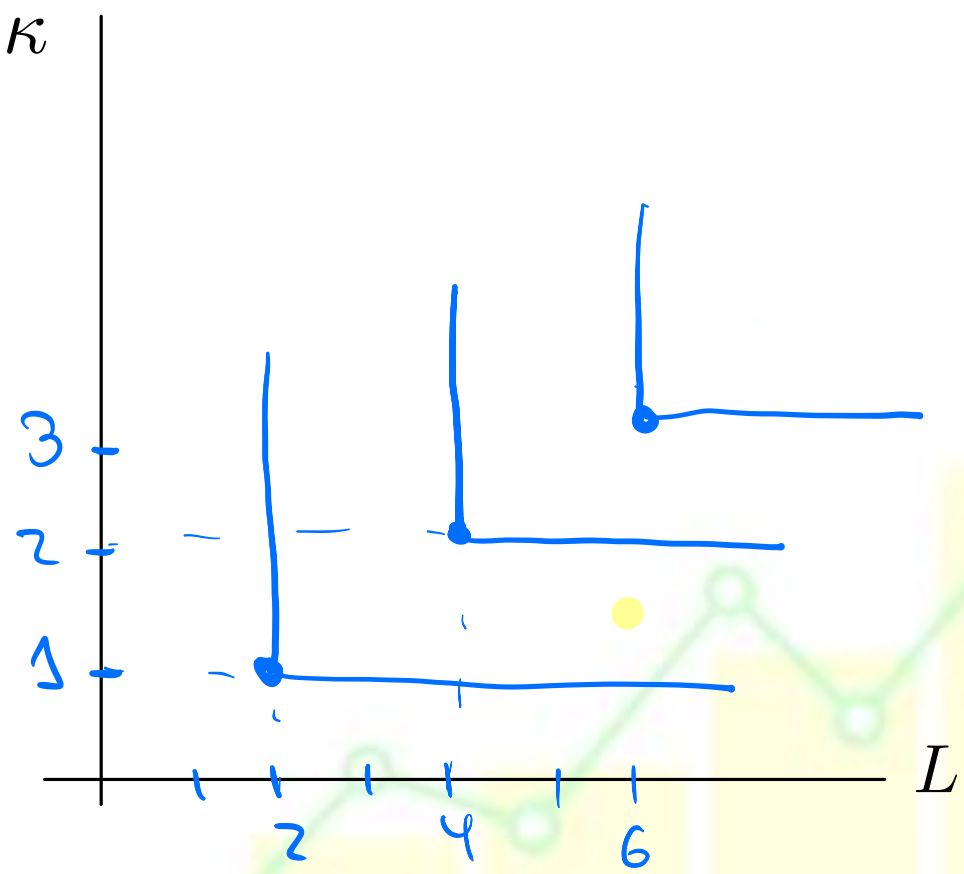
$$Q = \min\left\{\frac{L}{2}, \frac{k}{1}\right\}$$

$$Q = \min\{L, 2k\}$$

$$\min\{L, 2k\}$$

$\boxed{L = 2 \cdot k}$ nº trabajadores tiene que ser doble autobuses

¿ Cómo serían las **isocuantas**?



$$L = 2k$$

$para \quad K = 1 \quad L = 2$

$para \quad k = 2 \quad L = 4$

$\min\{L, 2k\}$

$L = 2k$

K	L
1	2
2	4
3	6

Factores de producción sustitutivos perfectos

En este caso los factores se pueden combinar de cualquier manera y además la cantidad de producción dependerá de la cantidad de factores que se utilicen .

Veamos un ejemplo .

Una empresa ~~pude~~ puede elegir entre máquinas y hombres . Cada trabajador produce 5 unidades al día y cada máquina produce 2 unidades al día . La producción dependerá del número de trabajadores que tenga y del número de máquinas que tenga

$$Q = ak + bL$$

$$Q = \underset{\downarrow \atop 2}{a}k + \underset{\downarrow \atop 5}{b}L$$

cada máquina produce 2 unidades

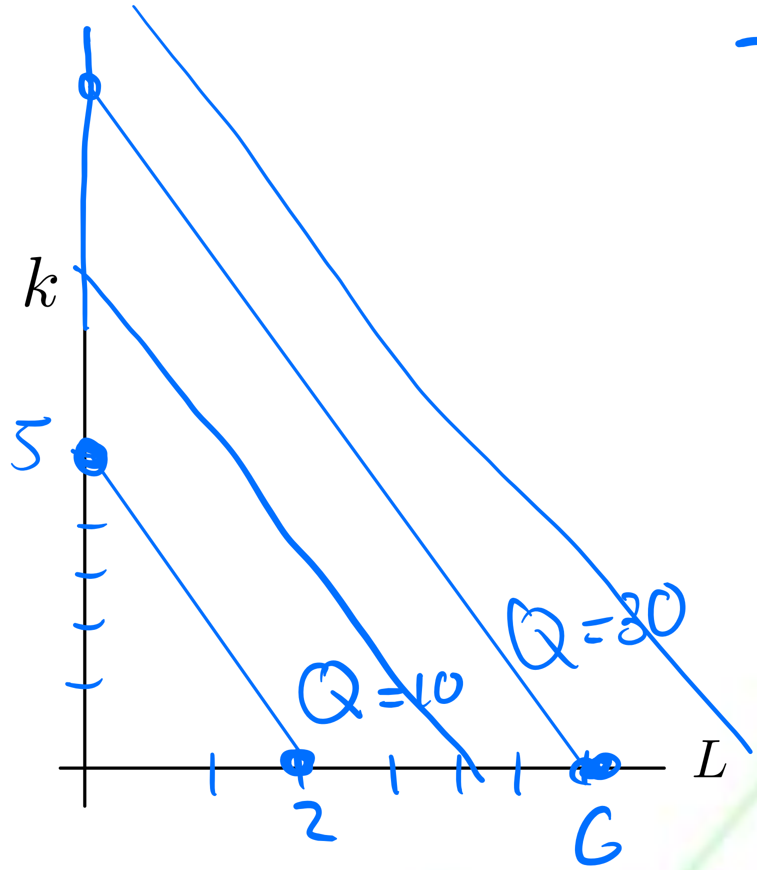
Cada trabajador produce 5 unidades

$$Q = 2K + 5L$$

Si tiene 4 máquinas y 3 trabajadores podrá producir

$$Q = 2 * 4 + 5 * 3 = 23$$

¿ Cómo serían las **isocuantas?**



$$\boxed{Q = 2K + 5L}$$

$$Q = 10$$

$$2k + \cancel{5L} = 10$$

k	L
0	2
5	0

2k=10

Q=30

2k+5L=30

k	L
0	6
15	0

Tecnologías tipo Cobb-Douglas

Quizás sea la más utlilizadas de todas y su función de producción tiene la forma

$$q = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

A → la producción que obtendríamos si K=1 L=1

A representa la **escala de producción** y nos viene a decir cuánto se puede producir con una unidad de cada factor .

Veamos un ejemplo

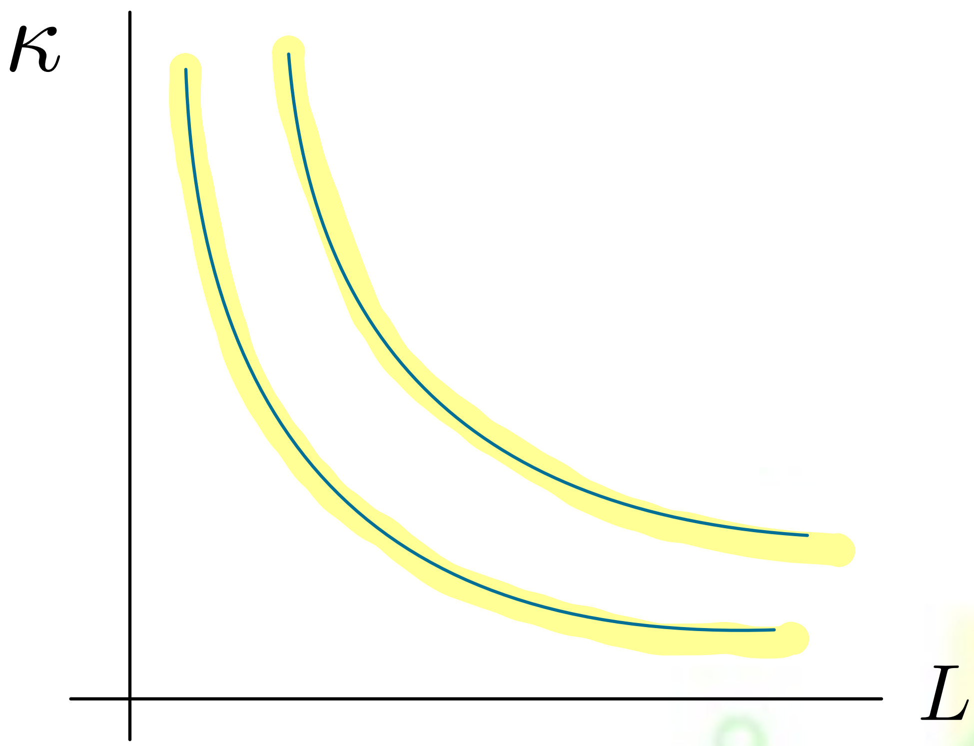
$$Q = 10k^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$$

$$A = 10$$

$$k = 1 \quad Y \quad L = 1$$

$$Q = 10 \cdot 1^{1/2} \cdot 1^{1/2} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

¿ Cómo son las **isocuantas**?



Paco 655474858
INFO@ADEFACIL.COM

Q=100 K=20
L=50

1 K produce 5 unidades
1 L produce 10 unidades

1L ∼ 2K

Sustitución entre factores

A veces nos puede interesar sustituir un factor por otro, por ejemplo podríamos sustituir factor trabajo por factor capital o viceversa , pero de manera que el proceso de producción siga siendo eficiente. El problema es cómo intercambiar un factor por otro , qué relación de intercambio hay entre ellos . De esto se encarga la **Relación Marginal de Sustitución Técnica .**

Vamos a definir la **Relación Marginal de Sustitución Técnica** como la manera a la que se puede cambiar un factor por otro pero manteniendo constante el nivel de producción.

Es muy importante tener claro que aunque cambiemos un factor por otro , el nivel de producción ha de permanecer constante.

Matemáticamente podríamos definirlo como

$$RMST = \frac{PMgL}{PMgK} = -\frac{dk}{dL}$$

1

Veamos un ejemplo .

$$Q = 2K + 6L$$

$$\cdot k_0 = 10$$
$$L_0 = 5$$

$$RMST = \frac{PMg(L)}{PMg\,K} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\underbrace{1L}\ \sim\ \underbrace{3K}$$

$$Q = 2 \cdot 10 + 6 \cdot 5 = 50\text{u}$$

$$K_1 = 13 \quad L_1 = 4$$

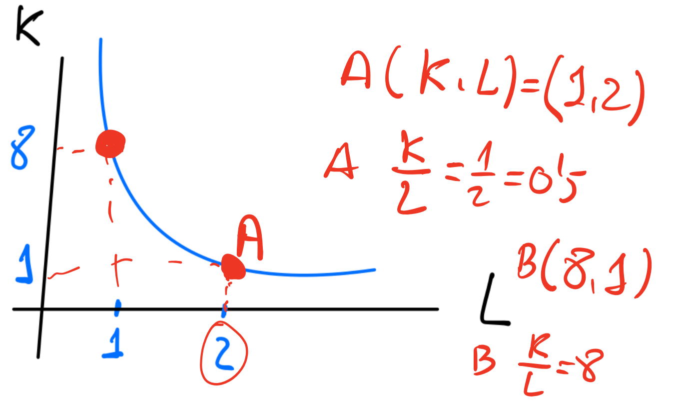
$$Q = 2 \cdot 13 + 6 \cdot 4 = 50\text{u}$$

Existe también otra medida que tiene relación con la manera en la que se permite la sustitución de factores , hablamos de **la elasticidad de sustitución de factores.**

Matemáticamente podemos definirla como

$$\sigma = \frac{\text{\% variación } (K/L)}{\text{\% variación RMST}}$$

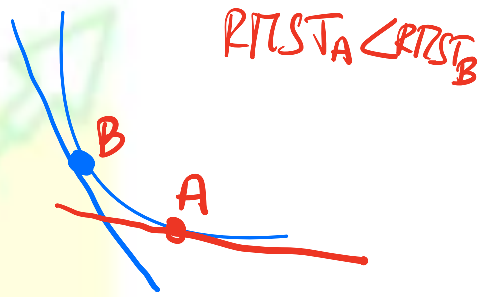
proporción utilizando factores



Matemáticamente este concepto nos viene a decir cómo se **curva** la isocuanta. Es una manera de ver la curvatura que tienen las isocuantas .

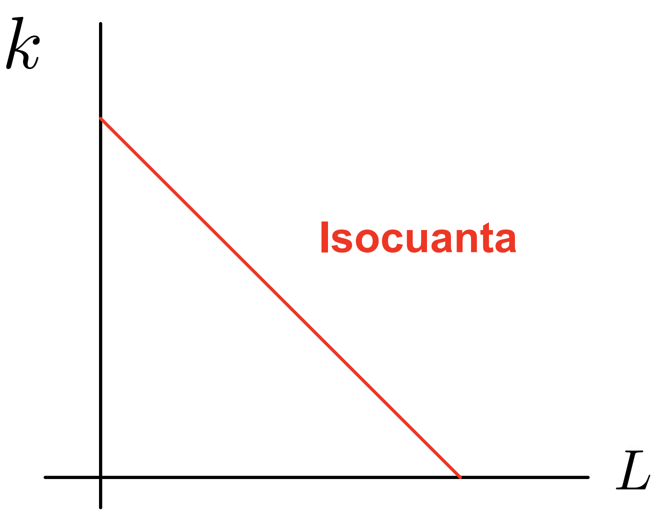
Los valores que tomar dicha variable están entre 0 e ∞

$$0 \leq \sigma \leq \infty$$



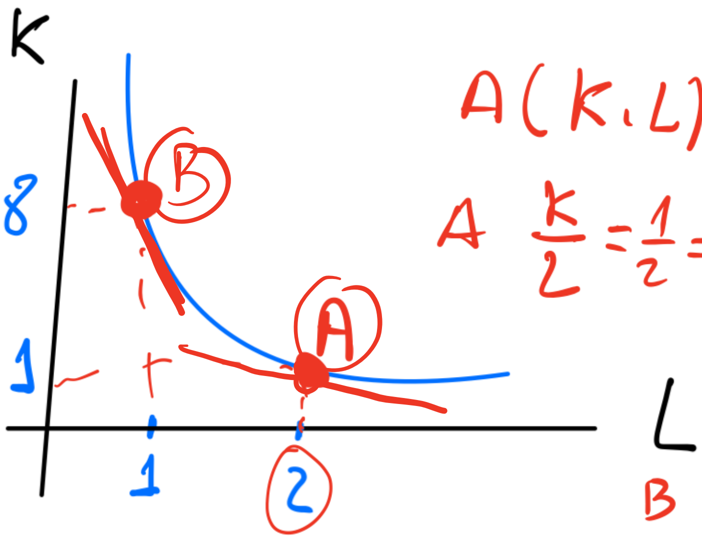
Para tecnologías de proporciones fijas o de Leontief la **elasticidad de sustitución es cero** , porque la relación que hay entre los factores es fija y no puede cambiar .

Para tecnologías de sustitutos perfectos al ser las isocuantas líneas rectas lo que no puede cambiar es el denominador (**% variación RMST**) por tanto la **elasticidad de sustitución valdrá infinito.**



$$\sigma = \frac{\text{\% variación } (K/L)}{\text{\% variación RMST} = 0}$$

mide lo que cambia la inclinación de la isocuanta



$A(K,L)=(1,2)$

$A \quad \frac{K}{2}=\frac{1}{2}=0'5$

$B(8,1)$

$B \quad \frac{K}{L}=8$

$$\sigma = \frac{\%\ \text{variación}\ (K/L)}{\%\ \text{variación RMST}}$$

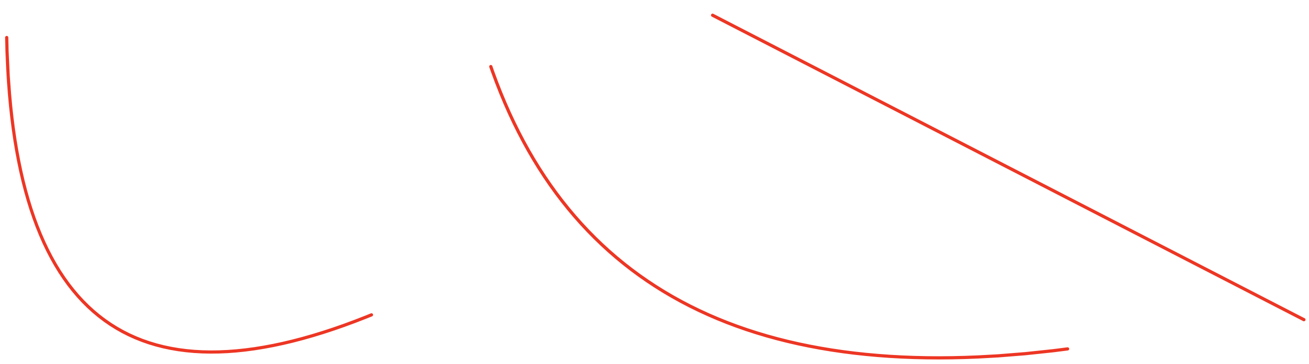
$A \quad \frac{K}{L}=0'5$

$B \quad \frac{K}{L}=8$

% variación $\frac{K}{L} \Rightarrow \dfrac{\left(\frac{K}{L}\right)_B - \left(\frac{K}{L}\right)_A}{\left(\frac{K}{L}\right)_A} \times 100$

$$\frac{8-0'5}{0'5}=15$$

% variación RMST $= \dfrac{\text{incl.B} - \text{incl.A}}{\text{incl A}}$



Para tecnologías del tipo Cobb-Douglas **la elasticidad de sustitución** será la unidad .

A modo de resumen **la elasticidad de sustitución valdrá :**

$\sigma = 0$ ⟶ **Función producción de proporciones fijas** Leontief

$\sigma = \infty$ ⟶ **Función producción sustitutos perfectos**

$\sigma = 1$ ⟶ **Función Producción Cobb-Douglas**

Rendimientos de escala

Este término nos dirá qué pasa con la producción cuando varía os todos los factores en la misma proporción. Fijaros que al poder variar todos los factores estaríamos hablando del **largo plazo .**

- Diremos que una tecnología presenta **rendimientos constantes de escala** cuando al cambiar todos los factores en la misma proporción la producción también varía en esa misma proporción.

Por ejemplo si al doblar la cantidad de capital y la cantidad de trabajo la producción también sale el doble entonces presentaría **rendimientos constantes de escala**

$Q = 3K + 2L$

$K = 4 \quad L = 5 \quad Q = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 22$

$K = 8 \quad L = 10 \quad Q = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 10 = 44$

$$Q = 2k + 3L$$

$$\left.\begin{array}{l} k = 5 \\ L = 6 \end{array}\right\} \quad Q = 2.5 + 3.6 = 28$$

$$\left.\begin{array}{l} k = 10 \\ L = 12 \end{array}\right\} \quad Q = 2.10 + 3.12 = 56$$

- Diremos que una tecnología presenta **Rendimientos crecientes de escala** cuando al variar todos los factores en la misma proporción la producción variará en una proporción mayor

$$Q = K^{1} \cdot L^{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} k = 6 \\ L = 5 \end{array}\right\} \quad Q = 6.5 = 30$$

$$\left.\begin{array}{l} k = 12 \\ L = 10 \end{array}\right\} \quad Q = 12 \cdot 10 = 120$$

- Diremos que una tecnología presenta **Rendimientos Decrecientes de escala** cuando al variar todos los factores en la misma proporción la producción varía en una proporción menor

$$Q = K^{0,5} \cdot L^{0,1}$$

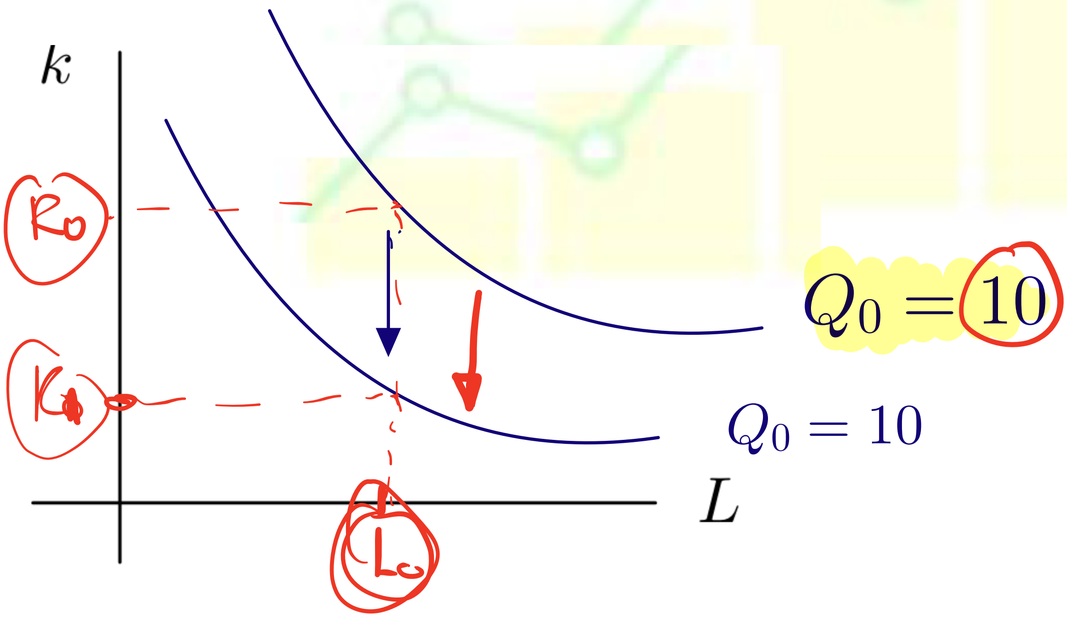
$$\left.\begin{array}{l} k = 1 \\ L = 1 \end{array}\right\} \quad Q = 1^{0.5} \cdot 1^{0,1} = 1$$

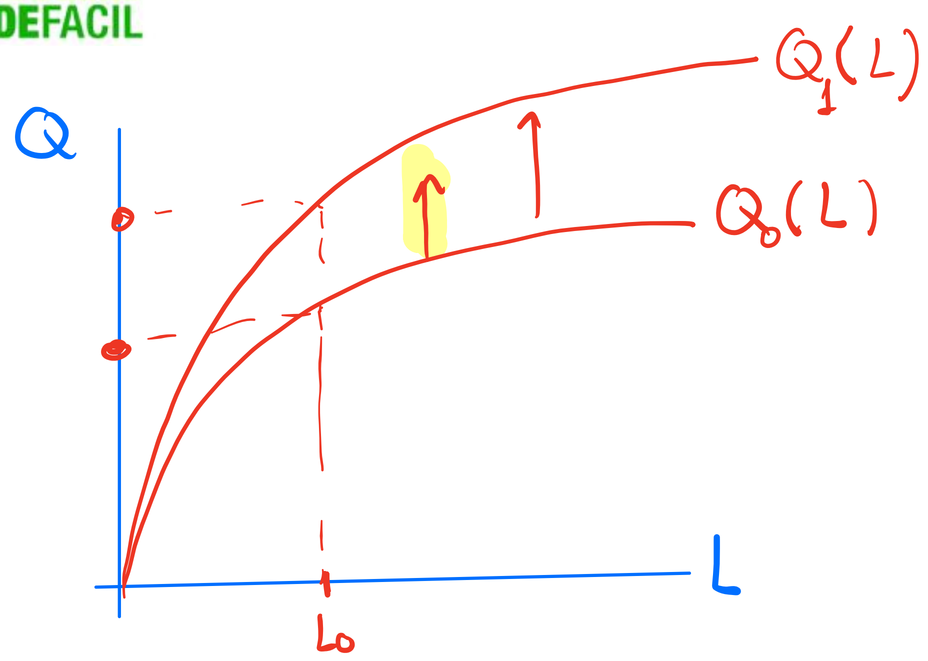
$$\left.\begin{array}{l} k = 2 \\ L = 2 \end{array}\right\} \quad Q = 2^{0.5} \cdot 2^{0,1} \simeq 1,51$$

Progreso técnico

Con el paso del tiempo los métodos de producción van mejorando ,de manera que por lo general con la misma cantidad de factores se obtendrá una mayor cantidad de producción .

Podríamos decir que los métodos de producción son más eficientes, pues bien esa mejora tendrá su influencia en **la función de producción** y en las **isocuantas** .




Q
$Q_1(L)$
$Q_0(L)$
L
L_0