2.2.2.2 Forma funcional

Modelo de regresión es flexible y contempla relaciones no lineales. Los modelos de regresión no lineales en las variables los podemos linealizar mediante cambios de variable y es muy habitual realizar transformaciones de las variables en econometría.

Las transformaciones más comunes son:

- Modelos logarítmicos o de elasticidad constante (log-log)
- Modelos semilogarítmicos:
  - Logarítmicos lineales (log-nivel) (log - lin)
  - Lineales logarítmicos (nivel-log) (lin - log)
- Modelos recíprocos

Existen modelos que no son lineales pero que si son intrínsecamente lineales, esto significa, que mediante una transformación matemática se podrían convertir en lineales. En Econometría se utiliza frecuentemente la transformación logarítmica para conseguir modelos del tipo **log-log** o de **elasticidad constante**, cuya ventaja es que los coeficientes de las variables se pueden interpretar directamente como las elasticidades.

Por ejemplo, cuando la relación entre las variables es exponencial del tipo:

$$Y=\beta_0 X^{\beta_1} e^{\varepsilon} \longrightarrow \ln Y = \ln(\beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot e^{\varepsilon}) = \overbrace{\ln \beta_0}^{cte} + \ln X^{\beta_1} + \ln e^{\varepsilon} = \alpha_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon$$

si tomamos logaritmos y operamos, entonces se puede expresar como:

$$\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon = \alpha_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon$$

puesto que ln β_0 es una constante podemos hacer el cambio (ln $\beta_0 = \alpha_0$) y así tenemos un modelo lineal a partir de un modelo que inicialmente no lo era y ya podríamos aplicar MCO.

* Análisis modelo Log-Log

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \varepsilon$$

Relación entre ln y %

$$\underbrace{\ln(X+\Delta X) - \ln X}_{\text{captura la variación \% de la X dividido por 100}} \simeq \frac{\Delta X}{X}$$

$$\frac{\Delta X}{X} \simeq 0'01$$

$$0'01 \times 100 \Rightarrow 1\%$$

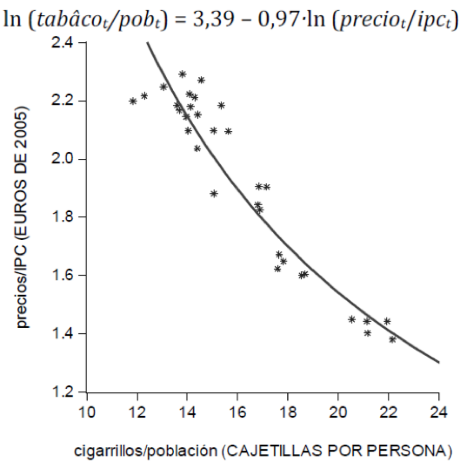
$$\underbrace{\ln(Y+\Delta Y) - \ln Y}_{\frac{\Delta Y}{Y}} = \cancel{\beta_0} + \beta_1 \ln(X_1+\Delta X_1) + \cancel{\varepsilon} -$$

$$-(\cancel{\beta_0} + \beta_1 \ln X_1 + \cancel{\varepsilon}) =$$

$$= \beta_1 \underbrace{(\ln(X_1+\Delta X_1) - \ln X_1)}_{\frac{\Delta X}{X}}$$

$$\underbrace{\frac{\Delta Y}{Y} \cdot 100}_{\Delta Y\%} = \beta_1 \underbrace{\frac{\Delta X}{X} \cdot 100}_{\Delta X\%} \Rightarrow \boxed{\Delta Y\% = \beta \Delta X\%}$$

Ejemplo 3: Demanda de tabaco



MODELO: $\ln\left(tab\hat{a}co_t/pob_t\right) = 3{,}39 - 0{,}97 \cdot \ln\left(precio_t/ipc_t\right)$

donde $\hat{\beta}_1 = -0{,}97$

INTERPRETACIÓN: Si el precio crece un 1% la cantidad consumida disminuye un 0,97%

- Análisis del modelo logarítmico lineal (log-lin o log-nivel)

Cuando la variable endógena Y está en logaritmos y la variable explicativa X está en niveles. Su forma general es:

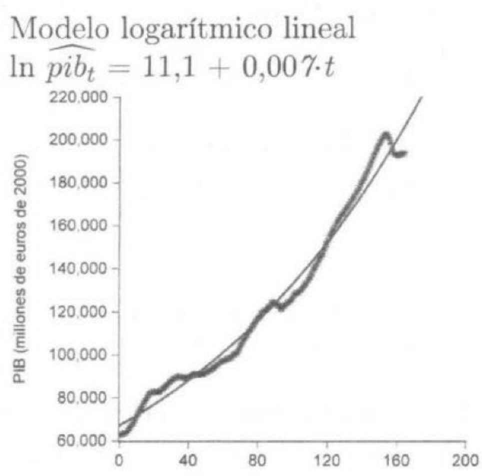
$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$$

donde la pendiente β_1 multiplicada por 100 es aproximadamente la tasa porcentual de cambio de la variable dependiente (semielasticidad):

$$\boxed{\Delta Y\% = 100\beta\Delta X}$$

Si X cambia una unidad (cambio unitario), este cambio está asociado a un cambio de100x $\beta\%$

Ejemplo 4: Crecimiento de la economía española



MODELO: $\widehat{\ln pib_t} = 11,11444 + 0,006833 \cdot t$

INTERPRETACIÓN: la tasa de variación en estos modelos es la pendiente multiplicada por 100, en este caso la tasa de variación es 0,6833% (100x0,006833)

- Análisis del modelo lineal logarítmico (lin-log o nivel-log)

Cuando la variable dependiente Y está en niveles y la independiente X en logaritmos. Su forma general es:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon$$

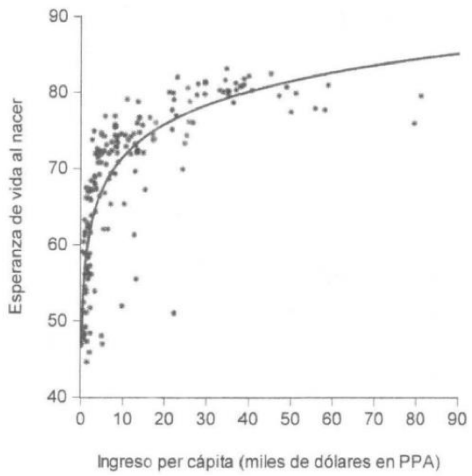
donde la pendiente β_1 dividida por 100 es la tasa porcentual de cambio de la variable explicada:

$$\boxed{\Delta Y = (\beta/100)\Delta X\%}$$

Si cambia X en 1%, es decir, si $\Delta X/X=0{,}01$, entonces dicho cambio tiene asociado en este modelo una variación en Y de 0,01x β_1

Ejemplo 5: Esperanza de vida e ingresos

Ajuste lineal logarítmico: $\widehat{esperanza_i} = 57{,}27 + 6{,}197 \cdot (\ln\ ingresos_i)$



MODELO: $\widehat{esperanza_i} = 57,27 + 6,197 \cdot (\ln ingresos_i)$

INTERPRETACIÓN: un incremento de un 1% en los ingresos per cápita (PPA) propicia un incremento de 0,06197 (6,197/100) años en la esperanza de vida.

- Análisis del modelo recíproco

Se conoce como modelo recíproco aquel en el que la variable independiente aparece en su forma inversa:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \left(1/X_1\right) + \varepsilon$$

A medida que aumenta X, la variable independiente disminuye 1/X, y en el límite se va acercando a cero, momento en el que la variable explicada Y se hace igual al término constante. Este tipo de modelos tiene sentido cuando la variable dependiente tiene límite asintótico β_0

Ejemplo 6: Mortalidad infantil y años de estudio

Datos de mortalidad infantil por cada cien mil habitantes y años de estudios en promedio de 185 países.

$$\widehat{mortalidad} = -1,56 + 292,78\,(1/estudios)$$

INTERPRETACIÓN: a medida que aumentan los años de estudios disminuye la tasa de mortalidad infantil, si los años de estudio son igual a uno, entonces el modelo predice una tasa de mortalidad por cien mil de 291,22 (292,78-1,56).

$\widehat{mortalidad} = -1'56 + 292'78(1/1)$

FORMAS FUNCIONALES HABITUALES

Formas funcionales usuales

Modelo	*Variable dependiente*	*Variable independiente*	*Interpretación del cambio*	*Elasticidad*
Nivel-nivel	Y	X	$\Delta Y = \beta \Delta X$	$\beta(X/Y)$
Nivel-log	Y	$\ln X$	$\Delta Y = (\beta/100)\Delta X\%$	$\beta(1/Y)$
Log-nivel	$\ln Y$	X	$\Delta Y\% = 100\beta\Delta X$	βX
Log-log	$\ln Y$	$\ln X$	$\Delta Y\% = \beta\Delta X\%$	β

Elasticidad:

$$\boxed{\varepsilon_{x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y_i}}$$

- lin – lin : $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

$$\varepsilon_X = \beta_1 \cdot \frac{X}{Y}$$

- lin – log : $Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon$

$$\varepsilon_X = \beta_1 \cdot \frac{1}{\cancel{X}} \cdot \frac{\cancel{X}}{Y} = \beta_1 \frac{1}{Y}$$

• log_lin : $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{Y} = \beta_1 \Rightarrow \beta_1 \cdot Y$$

$$\varepsilon_X = \beta_1 \cdot \cancel{Y} \cdot \frac{X}{\cancel{Y}} = \beta_1 \cdot X$$

• log_log : $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{Y} = \beta_1 \frac{1}{X}$$

$$\beta_1 \frac{1}{X} \cdot Y$$

$$\varepsilon_X = \beta_1 \frac{1}{\cancel{X}} \cdot \cancel{Y} \cdot \frac{\cancel{X}}{\cancel{Y}} = \beta_1$$