PROBLEMA 1.

En un punto O de un sólido elástico se originan, sucesivamente, los estados tensionales A y B, definidos por las tensiones y direcciones principales siguientes:

Estado A:

- $\sigma_1 = 10$ MPa $(0, 1, 0)$
- $\sigma_2 = 2$ MPa $(0, 0, 1)$
- $\sigma_3 = -5$ MPa $(1, 0, 0)$

Estado B

- $\sigma_1' = 4$ MPa $(1, 0, 0)$
- $\sigma_2' = -2$ MPa $(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
- $\sigma_3' = -10$ MPa $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

$$\vec{u}_3' = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ & & \\ & & \end{vmatrix} = k - \quad j$$

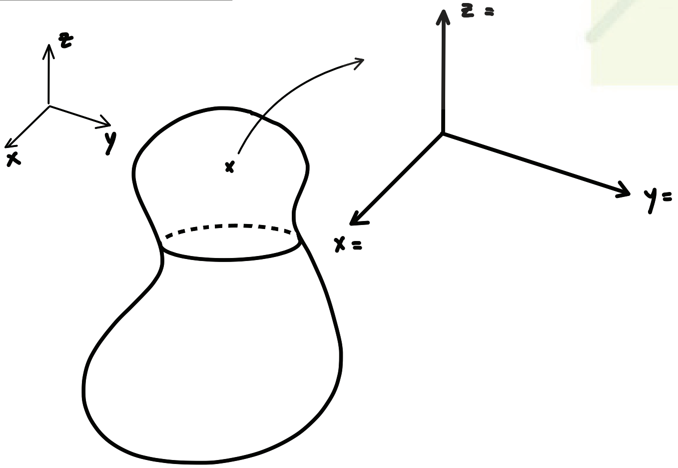
$$u_3' = (\quad ; \quad ; \quad)$$

En ambos estados de carga, las direcciones principales están referidas a un sistema cartesiano OXYZ. Se pide:

a) Obtener la matriz de tensiones, referida al sistema OXYZ, cuando actúan simultáneamente los estados tensionales A y B.

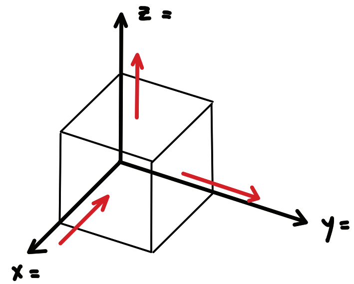
b) Determinar, para la matriz obtenida, las tensiones y direcciones principales.

$\boxed{\text{ESTADO TENSIONAL A)}}$

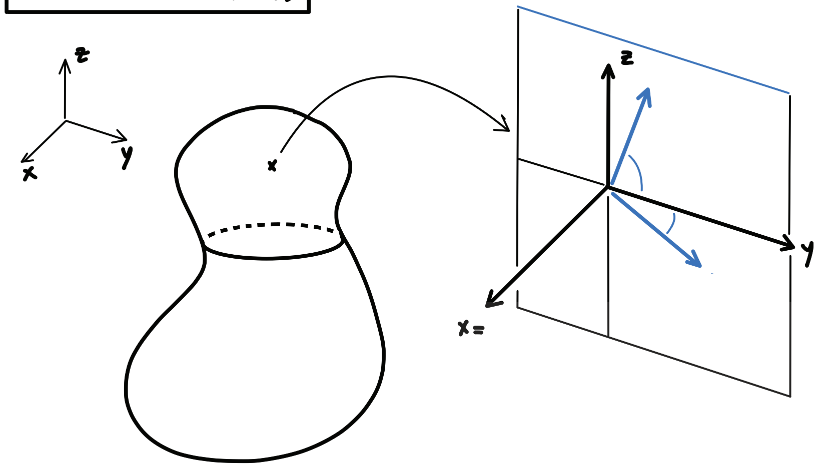


$$[\sigma_{1,2,3}] = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \text{MPa} \rightsquigarrow \text{DIRECTAMENTE} \quad [\sigma_{x,y,z}] = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \text{MPa}$$

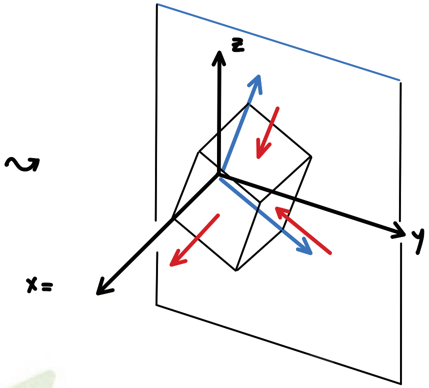
$$\vec{u}_1 = (0 ; 1 ; 0)$$
$$\vec{u}_2 = (0 ; 0 ; 1)$$
$$\vec{u}_3 = (1 ; 0 ; 0)$$



ESTADO TENSIONAL B)



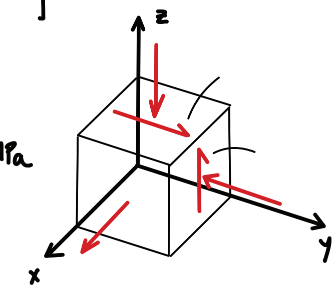
$$[\sigma_{1',2',3'}] = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \text{MPa} \rightsquigarrow$$



$$\begin{cases} u_1' = (1\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ u_2' = (0\ ;\ 1/2\ ;\ \sqrt{3}/2) \\ u_3' = (0\ ;\ \sqrt{3}/2\ ;\ -1/2) \end{cases}$$

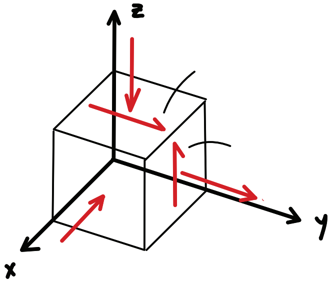
PARA CONSEGUIR $[\sigma_{x,y,z}]$ A PARTIR DE $[\sigma_{1',2',3'}] \longrightarrow [\sigma_{x,y,z}] = [\ \ ]\cdot[\sigma_{1',2',3'}]\cdot[\ \ ]$ CON $[R] = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$

$$[\sigma_{x,y,z}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \text{MPa}$$



ESTADO TENSIONAL A) + B)

$$[\sigma_{x,y,z}] = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \text{MPa}$$



TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES OPCIÓN 1

$$[\sigma_{x,y,z}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \text{MPa} \rightarrow \left| \quad \right| = 0 \rightarrow \quad = 0 \rightarrow \quad = 0 \rightarrow \quad = \quad \begin{cases} \sigma_y^* = \\ \sigma_z^* = \end{cases}$$

ENTONCES $[\sigma_{x^*,y^*,z^*}] = \begin{bmatrix} \; & 0 & 0 \\ 0 & \; & 0 \\ 0 & 0 & \; \end{bmatrix}$ MPa $\rightarrow$ ORDENAMOS DE MAYOR A MENOR $\rightarrow$ $\boxed{[\sigma_{1,2,3}] = \begin{bmatrix} \; & 0 & 0 \\ 0 & \; & 0 \\ 0 & 0 & \; \end{bmatrix} \text{MPa}}$

YA TENEMOS $\boxed{\vec{u}_2 = (\quad ; \quad ; \quad)}$ $\rightarrow$ ¿EL RESTO?

- PARA $\sigma_1 =$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \; & 0 & 0 \\ 0 & \; & \; \\ 0 & \; & \; \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \alpha_1 = \\ \rightarrow \quad = 0 \rightarrow \beta_1 = \\ \rightarrow \quad = 0 \end{matrix}$$

ECUACIÓN EXTRA: $\quad = 1 \rightarrow \quad = 1 \rightarrow \gamma_1 = \quad \rightarrow \beta_1 =$

ENTONCES $\boxed{\vec{u}_1 = (\quad ; \quad ; \quad)}$

- PARA $\sigma_3 =$

IMPONEMOS $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{vmatrix} = \quad j - \quad k \rightarrow$ ENTONCES $\boxed{\vec{u}_3 = (\quad ; \quad ; \quad)}$

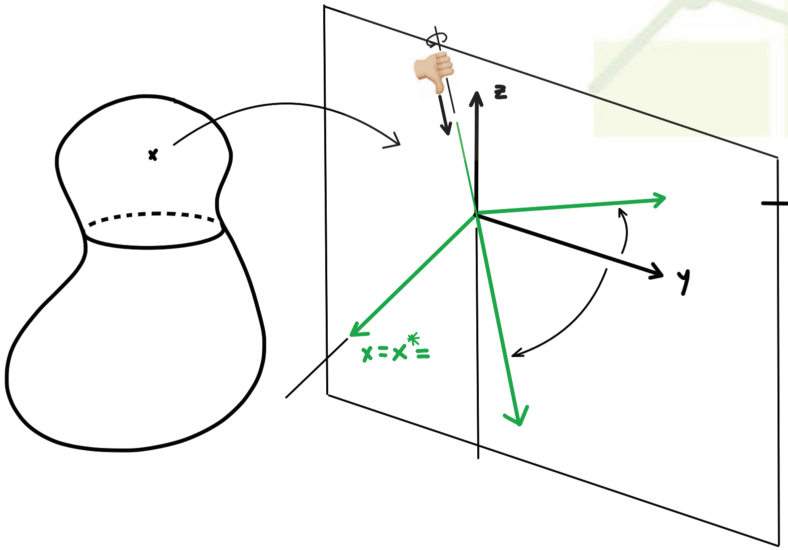
TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES

$\boxed{\text{OPCIÓN 2}}$

$$[\sigma_{x,y,z}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{FÓRMULA: } \frac{\quad}{\quad} \pm \sqrt{\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2 + (\quad)^2} = \frac{\quad}{\quad} \pm \sqrt{\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2 + (\quad)^2} = \pm\sqrt{\quad} = \left\langle \begin{matrix} \sigma_y^* = \\ \sigma_z^* = \end{matrix} \right.$$

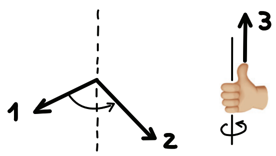
$$\text{ENTONCES } [\sigma_{x^*,y^*,z^*}] = \begin{bmatrix} \quad & 0 & 0 \\ 0 & \quad & 0 \\ 0 & 0 & \quad \end{bmatrix} \text{MPa} \rightarrow \text{ORDENAMOS DE MAYOR A MENOR} \rightarrow \boxed{[\sigma_{1,2,3}] = \begin{bmatrix} \quad & 0 & 0 \\ 0 & \quad & 0 \\ 0 & 0 & \quad \end{bmatrix} \text{MPa}}$$

$$\text{YA TENEMOS } \boxed{\vec{u}_2 = (\quad ; \quad ; \quad)} \rightarrow \text{¿EL RESTO?} \rightarrow \text{FÓRMULA} \rightarrow \theta_{y-y^*} = \text{ARCTG} \frac{|\quad|}{\quad} = \text{ARCTG} \frac{\quad}{\quad} =$$



$$\rightarrow \vec{u}_1 = (0 ; \quad ; \quad) \rightarrow \boxed{\vec{u}_1 = (\quad ; \quad ; \quad)}$$

PARA ENCONTRAR $\vec{u}_3$ → REGLA DE LA MANO DERECHA

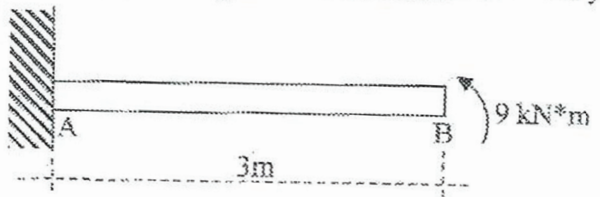


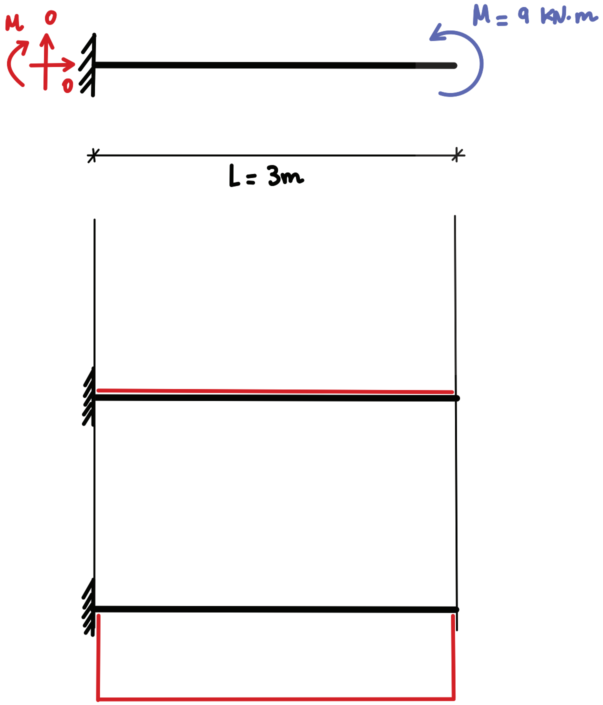
$$\text{ENTONCES } \vec{u}_3 = (0 ; \quad ; \quad)$$

$$\boxed{\vec{u}_3 = (0 ; \quad ; \quad)}$$

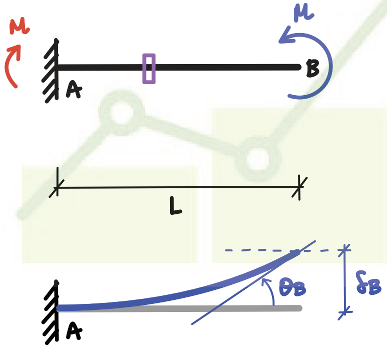
PROBLEMA 2.

Determinar el giro y la flecha en el extremo B de la viga prismática en voladizo AB, cargada como se indica en la figura, sabiendo que la rigidez a la flexión de la viga es EI = 10 MN.m^2 ; determinar, asimismo, los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes.





CÁLCULO DE DEFORMACIONES



TEOREMAS DE MOHR

1er TEOREMA $\qquad \theta_B = \pm\theta_A + \int_A^B \frac{M_z(x)}{E\cdot I_z}\cdot dx$

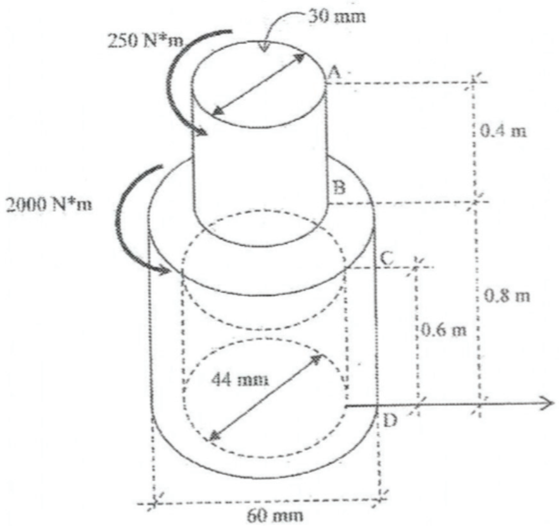
$$\theta_B = \int \frac{\quad}{E\cdot I_z}\,dx = \frac{\quad}{E\cdot I_z}\left[\quad\right] = \boxed{\frac{\cdot}{E\cdot I_z}} = +2{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{RAD}\ (\curvearrowleft)$$

2º TEOREMA $\qquad \delta_B = \delta_A \pm \theta_A\,(x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M_z(x)}{E\cdot I_z}\,(x_B - x)\,dx$

$$\delta_B = \int \frac{\quad}{E\cdot I_z}(\quad)\,dx = \frac{\quad}{E\cdot I_z}\left[\quad\right] = \boxed{\frac{\cdot}{\cdot EI_z}} = \quad = +4{,}05\ \text{mm}\ (\uparrow)$$

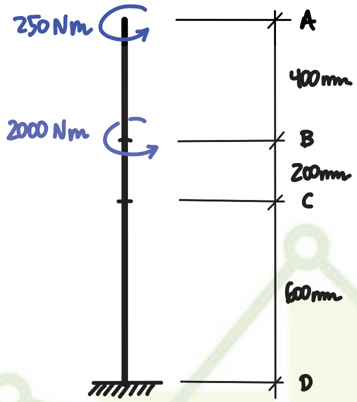
PROBLEMA 3.

El árbol vertical AD está unido a la base fija en D y sometido a los momentos de torsión que se ilustran en la figura. Se ha perforado un agujero de 44mm de diámetro en el centro de la porción CD del árbol. Sabiendo que el árbol completo está hecho de acero, con G = 80 GPa, hallar el ángulo de torsión en el punto A.



GIRO A TORSIÓN EN UN TRAMO: $\theta_{ij} = \int \frac{\quad}{\quad} \cdot dx \overset{\text{si CONSTANTE}}{=} \frac{\quad}{\quad}$

GIRO EN UNA SECCIÓN: $\theta_j = \quad + \quad$



SECCIÓN $I_t = \quad = \quad =$

SECCIÓN $I_t = \quad = \quad =$

SECCIÓN $I_t = \quad = (\quad) =$

$\theta_D =$

$\theta_C = \theta_D + \theta_{DC} = \quad + \frac{\quad}{\quad} =$

$\theta_B = \theta_C + \theta_{CB} = \quad + \frac{\quad}{\quad} = \quad + \quad =$

$\theta_A = \theta_B + \theta_{BA} = \quad + \frac{\quad}{\quad} = \quad + \quad = \boxed{+38{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{RAD}}$

$\theta_A = \theta_D + \theta_{DC} + \theta_{CB} + \theta_{BA} = \frac{\quad}{\quad} \left[0 + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} \right] = \boxed{+38{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{RAD}}$