CONCEPTOS MATEMÁTICOS

1. MATRICES

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

a. Nomenclatura

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

$\left.\begin{matrix} m \text{ filas} \\ n \text{ columnas} \end{matrix}\right\}$ $m \times n \rightarrow$ dimensión

b. Tipos de matrices

$A = (a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}) \Rightarrow$ matriz fila $1 \times n \Rightarrow A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \Rightarrow$ matriz columna $m \times 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

si $m = n \Rightarrow$ matriz cuadrada de orden n $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ orden 2

MATRIZ IDENTIDAD $\quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

MATRIZ NULA $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

MATRIZ SIMÉTRICA
$a_{ij} = a_{ji}$ si $i \neq j$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR
$a_{ij} = 0 \quad \forall i,j \,/\, i > j$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c. Traspuesta de una matriz

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{dimensión}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2$

d. Traza de una matriz

$$\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr} A = 5 + 1 + (-3) = 3$$

e. Operaciones elementales de matrices

A y B son EQUIVALENTES si llegamos a ella a través de operaciones elementales.

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

MATRIZ ELEMENTAL → obtenida con una sola operación elemental sobre la I

- Trasposición

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A \sim B$$

- Multiplicación por una constante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \underset{F_2 = 3F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 12 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- Adición de filas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \underset{F_2 = F_2 + F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

f. Matriz inversa

Matrices cuadradas: REGULAR → si $\exists A^{-1}$; SINGULAR → si $\nexists A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 = \frac{F_2}{-7}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 - 5F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

g. Operaciones con matrices

- Suma

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

IMPORTANTE. Solo se pueden sumar matrices de iguales dimensiones

- Resta

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Multiplicación

$$A \cdot B = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 6 \\ 15 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

NO ES CONMUTATIVA

$A \times B \neq B \times A$

IMPORTANTE. Solo se pueden multiplicar matrices $m \times n$ por matrices $n \times p$

- Potencia

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 111 \\ 74 & 191 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL: $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$

- "División"

$$A X = B \rightsquigarrow \underbrace{A^{-1} A}_{} X = A^{-1} B$$

$$I X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$X A = B \rightarrow X A A^{-1} = B A^{-1}$$

$$X I = B A^{-1}$$

$$X = B A^{-1}$$

2. DETERMINANTES

a. Nomenclatura

$|A| \qquad \det(A)$

b. Cálculo del determinante por fórmula

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 1\cdot 5 = 13 \qquad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 4 + 2\cdot 5\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 3 - (1\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 5\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 4)$$
$$= 16+10+0 - (12+10+0) = 26-22 = \underline{\underline{4}}$$

c. Cálculo del determinante por adjuntos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(16-10) + 1(10-12)$$
$$= 6 + (-2) = \underline{\underline{4}}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 4-3 + (2-4) - 2(1-2) = 1-2+2 = \underline{\underline{1}}$$

d. Propiedades de los determinantes

* si existe una fila o columna de 0 $\Rightarrow |A| = 0$
* si es matriz triangular $\Rightarrow |A| = \Sigma\, a_{ii}$
* $\det A = \det A^t$
* $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
* $\det(AB) = \det A \det B$

* $F_i \leftrightarrow F_j \Rightarrow |A|$ cambia de signo
* $\alpha F_i \Rightarrow \alpha |A|$
* $F_i = F_i + \alpha F_j \Rightarrow |A|$ no cambia

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

a. Nomenclatura

$$S=\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}}_{B} \rightsquigarrow AX=B$$

b. Rango de una matriz

rang (A) ≡ nº filas no nulas de cualquier matriz escalonada de A

$$\begin{pmatrix} 1 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}\underset{F_2=F_2-2F_1}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 5\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$ 2 filas no nulas $\Rightarrow$ Rang $A=2$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 5\\ 2 & 10\end{pmatrix}\underset{F_2=F_2-2F_1}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$ 1 fila no nula $\Downarrow$ Rang $B=1$

c. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

$AX=B \rightsquigarrow A$, $(A|B)$

SIST. EC.
- COMPATIBLES ($\exists$ solución): rang A = rang $(A|B)$
  - DETERMINADOS ($\exists$! única solución): rang A = rang $(A|B)$ = n (nº incóg)
  - INDETERMINADOS ($\exists$ ∞ soluciones): rang A = rang $(A|B)$ < n (nº incóg)
- INCOMPATIBLES ($\nexists$ solución): rang A ≠ rang $(A|B)$

$$\begin{cases} 2y+z=7\\ 6x+2y+z=-1\\ 2x+y+z=1\end{cases} \Rightarrow (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 7\\ 6 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\leftrightarrow F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\underset{F_3=F_3-\frac{1}{3}F_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{array}\right)$$

$$\underset{F_3=3F_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{array}\right)\underset{F_3=F_3-\frac{1}{2}F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)$$

rang A = 3 = rang $(A|B)$ = nº incógnitas $\Rightarrow$ $\boxed{\text{S.C.D } \exists \text{ una única solución}}$

d. Resolución de sistemas

- Compatibles determinados

$$\left\{\begin{array}{l} 2y + z = 7 \\ 6x + 2y + z = -1 \\ 2x + y + z = 1 \end{array}\right. \Rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \end{array}$$

$\text{rang}\, A = 3 = \text{rang}(A|B) = \text{nº incógnitas}$

$\boxed{\Rightarrow \text{S.C.D} \quad \exists \text{ una única solución}}$

$\Downarrow$

$\frac{3}{2}z = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{3}$

$2y + \frac{1}{3} = 7 \Rightarrow 2y = \frac{20}{3} \Rightarrow y = \frac{10}{3}$

$6x + 2 \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow 6x = -1 - \frac{21}{3} \Rightarrow 6x = \frac{-24}{3} \quad x = -\frac{4}{3}$

Cramer

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \rightarrow x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{15-7}{-6} = \frac{8}{-6} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{20-40}{-6} = \frac{\cancel{-}20}{\cancel{-}6} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{38-40}{-6} = \frac{\cancel{-}2}{\cancel{-}6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0+6+4-4-0-12 = -6$$

- Compatibles indeterminados

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y + 3z = 9 \\ 3x + y - z = -3 \\ 2x - y + z = 3 \end{array}\right\} \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - 2F_1}{\overset{F_2 = F_2 - 3F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & -10 & -30 \\ 0 & 5 & -5 & -15 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - \frac{1}{2}F_2}{\overset{F_2 = \frac{F_2}{10}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}\, A = 2 = \text{rang}(A|B) < 3 \Rightarrow SCI \; (\exists \infty \text{ soluciones})$

$0z = 0 \Rightarrow z = \lambda$

$y - \lambda = -3 \rightarrow y = -3 + \lambda$

$x - 3(-3+\lambda) + 3\lambda = 9 \rightarrow x + 9 \cancel{-3\lambda} \cancel{+3\lambda} = 9$

$x = 0$

$$\boxed{(x, y, z) = (0, -3+\lambda, \lambda)}$$