CONCEPTOS MATEMÁTICOS

1. MATRICES

1.6 Calcúlese A^3 sabiendo que A es la matriz cuyas filas son (0, cos x, sen x) , (cos x, 0, -1) y (sen x, 1, 0)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 0 & -1 \\ \operatorname{sen} x & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 0 & -1 \\ \operatorname{sen} x & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 0 & -1 \\ \operatorname{sen} x & 1 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 0 & -1 \\ \operatorname{sen} x & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x & \operatorname{sen} x & -\cos x \\ -\operatorname{sen} x & \cos^2 x - 1 & \cos x \operatorname{sen} x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \cos x & \operatorname{sen}^2 x - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 0 & -1 \\ \operatorname{sen} x & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} x & -\cos x \\ -\operatorname{sen} x & -\operatorname{sen}^2 x & \cos x \operatorname{sen} x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \cos x & -\cos^2 x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 0 & -1 \\ \operatorname{sen} x & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7 A es la matriz de filas (0, a, 0), (0, 0, b) y (c, 0, 0) siendo a,b,c ∈ ℝ. De entre las siguientes opciones elija la correcta:

a. A^3 es una matriz escalar. → solo elementos en diag. principal ⇒ VERDADERO

b. A^n es una matriz escalar para todo n∈ ℕ ⇒ FALSO para $n=2$ no lo es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \\ 0 & ca & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \underbrace{A \cdot A} \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \\ 0 & ca & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$$

1.8 Se pide determinar la opción cierta, sabiendo que las matrices A y B satisfacen $A+B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

a. $A^2+B^2=\begin{pmatrix}12 & 6\\ \frac{19}{2} & \frac{11}{2}\end{pmatrix}$

b. $(A+B)^2=\begin{pmatrix}9 & 4\\ 49 & 0\end{pmatrix}$

c. $A^2-B^2=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 14 & 21\end{pmatrix}$

$$A+\cancel{B}+A-\cancel{B}=2A$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}=2A$$

$$\begin{pmatrix}5 & 5\\ 6 & 0\end{pmatrix}=2A$$

$$\begin{pmatrix}5/2 & 5/2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=A$$

$$B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5/2 & 5/2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$a)\ A^2=\begin{pmatrix}5/2 & 5/2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5/2 & 5/2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}55/4 & 25/4\\ 15/2 & 15/2\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/4 & -1/4\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix}55/4 & 25/4\\ 15/2 & 15/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7/4 & -1/4\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 19/2 & 11/2\end{pmatrix}$$ CORRECTA

$$b)\ (A+B)^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 6\\ 21 & 14\end{pmatrix}$$ FALSA

$$c)\ A^2-B^2=\begin{pmatrix}55/4 & 25/4\\ 15/2 & 15/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7/4 & -1/4\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31/2 & 13/2\\ 11/2 & 19/2\end{pmatrix}$$ FALSA

1.9 Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Se pide calcular la suma: $S = A+AB+AB^2+AB^3+\ldots+AB^n$

a. $S=\begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & 0\\ 0 & \frac{3^{n+1}-1}{2}\end{pmatrix}$

b. $S=\begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & 0\\ 0 & 3^{n+1}-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \boxed{\text{CIERTO}}$

$$\sum_i^n a_1 r^i = a_1\,\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

$$B \text{ es diagonal} \Rightarrow B^n=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$$

$$S=A+AB+AB^2+\cdots+AB^n=A\left(I+B+B^2+\cdots+B^n\right)=A\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^2 & 0\\ 0 & 3^2\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\right]$$

$$=A\begin{pmatrix}1+2+2^2+\cdots+2^n & 0\\ 0 & 1+3+3^2+\cdots+3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1} & 0\\ 0 & 1\,\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & 0\\ 0 & \frac{3^{n+1}-1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & 0\\ 0 & 3^{n+1}-1\end{pmatrix}$$

1.10 Suponiendo que I_n-A es una matriz regular siendo A∈ $\mathcal{M}_{nxn}$, calcúlese la matriz inversa de I-A en función de potencias de A sabiendo que A^3 =0.

$$(I-A)^3(I-A)^{-1}=(I-A)^2$$

$$\left(I^3-3I^2A+3IA^2-\underset{0}{\cancel{A^3}}\right)(I-A)^{-1}=I^2-2IA+A^2$$

$$\left(I-3IA+3IA^2\right)(I-A)^{-1}=I-2A+A^2$$

$$\left(I-3A(I-A)\right)(I-A)^{-1}=I-2A+A^2$$

$$I(I-A)^{-1}\underbrace{-3AI}_{-3A}=I-2A+A^2$$

$$\boxed{(I-A)^{-1}=I+A+A^2}$$

1.11 Si A y B son matrices cuadradas de orden n tales que AB=A y BA=B, se verifica:

a. Si A es regular, entonces $B \neq I_n$.

b. $A^2=A$ y $B^2=B$.

a) $AB=A \rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}A \rightarrow IB=I \rightarrow \boxed{B=I} \Rightarrow$ $\boxed{\text{a es FALSA}}$

b) $AB=A \rightarrow BAB=BA \rightarrow (BA)\cdot B=BA \rightarrow B\cdot B=BA \rightarrow B^2=B$ ✓

$BA=B \rightarrow ABA=AB \rightarrow (AB)\cdot A=AB \rightarrow A\cdot A=A \rightarrow A^2=A$ ✓ $\}$ $\boxed{\text{b es CIERTA}}$

1.12 Se pide elegir las respuestas correctas:

a. Las matrices elementales son cuadradas.

b. Las matrices elementales son regulares.

c. Las matrices elementales permiten calcular la matriz inversa de una matriz regular.

a) Matrices elementales ⇒ se obtienen de op. element. sobre la $\underline{\underline{I_n}}$ ⇒ CORRECTA

b) Matrices elementales ⇒ regulares $(A|I) \rightsquigarrow (I|A)$ ⇒ CORRECTA

c) CORRECTA

1.13. Se pide justificar si las matrices son o no son elementales:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↓ ELEMENTAL

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2=3F_2}{\rightsquigarrow} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

↓ ELEMENTAL

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1=F_1+2F_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↓ NO ELEMENTAL

↓ ELEMENTAL

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1 = F_1 + 5F_3 + F_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 operaciones elementales

A_5 NO ELEMENTAL

$\downarrow$

NO ELEMENTAL

fila de ceros

1.14 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, se pide calcular las siguientes matrices y la matriz de paso asociada a cada una de ellas:

- Una matriz reducida de A

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 = F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ \sim \\ F_3 = F_3 - \frac{3}{2}F_1 \\ F_4 = F_4 - \frac{5}{2}F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7/2 & -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -13/2 & -5/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ F_3 = F_3 + 3F_2 \\ F_4 = F_4 + 2F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -7/2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\sim}{F_4 = F_4 - \frac{1}{14}F_3} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{7} & \frac{25}{14} & -\frac{1}{14} & 1 \end{array}\right)$$

matriz reducida $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matriz de paso $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \\ -23/7 & 25/14 & -1/14 & 1 \end{pmatrix}$

- Una matriz escalonada reducida de A con los pivotes normalizados

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{7} & \frac{25}{14} & -\frac{1}{14} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 = \frac{F_1}{2} \\ \\ \overset{\sim}{F_3 = F_3/7} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{7} & \frac{25}{14} & \frac{-1}{14} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{\text{matriz}} \quad \underbrace{}_{\text{matriz de paso}}$$

- La forma escalonada reducida de A

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{7} & \frac{25}{14} & \frac{-1}{14} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 = F_1 - \frac{3}{2}F_3 \\ F_2 = F_2 - \frac{7}{2}F_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \overset{\downarrow}{1} & 0 & 8/7 & -9/14 & -3/14 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -23/7 & 25/14 & -1/14 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_1 = F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -23/7 & 25/14 & -1/14 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A_{er}} \quad \underbrace{}_{P_3}$$

1.15 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y las matrices elementales $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, se pide calcular e interpretar los productos:

$$E_1A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

E_1A equivale a $F_1 = 2F_1$

$$E_2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \rightarrow 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \overset{\downarrow}{1} & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

E_2A equivale a $F_1 \leftrightarrow F_2$

$$E_3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 22 & 18 \end{pmatrix}$$

E_3A equivale a $F_3 = F_3 + 3F_2$

$$AE_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

AE_1 equivale a $C_1 = 2C_1$

$$AE_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

AE_2 equivale a $C_1 \leftrightarrow C_2$

$$AE_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 17 & 4 \\ 1 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

AE_3 equivale a $C_2 \leftrightarrow C_2 + 3C_3$

1.16 Calcúlese, si es posible, la inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{F_2 = F_2 + 3F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 = \frac{F_2}{5}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.17 ¿Es cierto que rang(A)+rang(B) = rang(A+B) siendo A, B ∈ $\mathcal{M}_{mxn}$?

$$\left.\begin{array}{ll} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{rang}(A) = 1 \\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{rang}(B) = 1 \end{array}\right\} \quad A+B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A+B) = 1 \neq \text{rang}\,A + \text{rang}\,B$$

No es cierto

1.18 Calcúlese el rango de las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

rang $(A_1) = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rang $(A_2) = 3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4 = F_4 - F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A_3 = 3$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rang $A_4 = 3$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rang $(A_5) = 4$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $(A_6) = 2$

1.19 Si A y B son matrices no cuadradas de orden m x n, se pide decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones:

a. Si A y B son equivalentes por filas, rang(A)=rang(B)

<u>CIERTA</u> $A \sim B \Rightarrow$ se obtiene B a partir de op. elementales en $A \Rightarrow$ tendrán la escalonada igual $\Rightarrow$ rang $A =$ rang B

b. Si A y B son equivalentes por columnas, rang(A)=rang(B)

$B = AQ \rightarrow B^t = (AQ)^t = \underbrace{Q^t}_{} A^t \Rightarrow$ <u>cierto</u>

1.20 Si A, B ∈ $\mathcal{M}_{mxn}$ y existen P y Q matrices regulares tales que B=PAQ se pide justificar la relación anterior en términos de operaciones elementales y decidir si rang(A) = rang(B).

↳ $\underset{\uparrow}{PA}$ ⇒ op. elementales indicadas por P por filas de A ⇒ rang PA = rang A

(PA) Q ⇒ op. elementales indicadas por Q por columnas de PA ⇒ rang (PA) Q = rang PA = rang A

↓ rang B = rang A

2. DETERMINANTES

1.21 Calcúlese el determinante de la matriz A de filas (1,2,m,4) , (3,2,1,m), (0,1,4,0) y (3m,5,1,2) mediante el desarrollo de la columna C₄ siendo m∈ ℝ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & m & \overset{-}{4} \\ 3 & 2 & 1 & m\,+ \\ 0 & 1 & 4 & 0\,- \\ 3m & 5 & 1 & 2\,+ \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3m & 5 & 1 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 4 \\ 3m & 5 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4(3+24m-3m-60) + m(1+24m-3m^2-20)$$

$$+2(8+3m-25) = -4(-57+21m) + m(-3m^2+24m-19) + 2(3m-17) =$$

$$= -3m^3 + 24m^2 - 97m + 194$$

1.22 Si a15a2ia3ja42a53 es un término del desarrollo de un determinante de orden 5, dicho término debe llevar signo negativo cuando (i,j) sea:

a

. (1,4)

$$\det A = \sum_{p} \operatorname{sig}(p)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{sp_s}$$

$$\{5,i,j,2,3\}: \quad \{5,1,4,2,3\} \to \{3,1,4,2,5\} \to \{3,1,2,4,5\} \to \{1,3,2,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

4 int ⇒ ⊕ FALSA

b.(4,1)

$$\{5,4,1,2,3\} \to \{3,4,1,2,5\} \to \{1,4,3,2,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

3 int ⇒ ⊖ CIERTO

c. Lo es siempre

↳ FALSO

1.23 Se pide calcular, si es posible, el determinante de las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 3$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_3 no es cuadrada $\Rightarrow \nexists\ |A_3|$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (1 + 0 + 0) = -1$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A_6| = 0$ (fila nula)

1.24 Si A es la matriz de filas (-1,-5, -7), (2,5,6) y (1,3,4), hállese la tercera columna de A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj } A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -20 - 42 - 30 + 35 + 18 + 40 = 1$$

$$3^a C \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.25 Si A es una matriz cuadrada real de orden n y B la matriz traspuesta de la matriz adjunta de A, se pide calcular el rango de B suponiendo que rang(A)=n.

$$\exists\ |A| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\ A^{-1} = \frac{(\mathrm{adj}\ A)^t}{|A|} = \frac{B}{|A|}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1}A = \frac{BA}{|A|} \rightarrow I = \frac{BA}{|A|} \rightarrow |A|\,I = BA \qquad |A| \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$|B| \neq 0$$

$$\mathrm{rang}\ B = n$$

1.26 Si A es una matriz cuadrada de orden 4 en cuyas filas se hacen las siguientes transformaciones: multiplicar por ½ la primera, multiplicar por 1/3 la segunda, restar a la tercera el doble de la cuarta y calcular su traspuesta, obtenemos una matriz B que verifica:

a. |A| = |B|

b. |A| =6|B|

c. |A| = (2 – 1/6) |B|

$$F_1 = \tfrac{1}{2}F_1 \Rightarrow |A_1| = \tfrac{1}{2}|A| \sim F_2 = \tfrac{1}{3}F_2 \Rightarrow |A_2| = \tfrac{1}{3}|A_1| = \tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{2}|A| = \tfrac{1}{6}|A|$$

$$\sim F_3 = F_3 - 2F_4 \Rightarrow |A_3| = |A_2| = \tfrac{1}{6}|A| \sim B = A_3^t \qquad |B| = |A_3| = \tfrac{1}{6}|A|$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{|A| = 6|B|}$$

1.27 Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, calcúlese $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 4 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\,\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\,\frac{1}{4}\cdot 1 = 1$$

1.28 Calcúlese el determinante de la matriz de filas (x,a,b,c), (a,x,0,0), (b,0,x,0), (c,0,0,x).

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{x} & \overset{-}{a} & \overset{+}{b} & \overset{-}{c} \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix} a & x & 0 \\ b & 0 & x \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & 0 \\ b & 0 & x \end{vmatrix} = -c\left(0+0+cx^2-0\right)+x\left(x^3+0+0-b^2x-0-a^2x\right)$$

$$= -c^2x^2+x^4-b^2x^2-a^2x^2 \boxed{= x^2\left(x^2-a^2-b^2-c^2\right)}$$

1.29 El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2+a & 1 \\ 2 & 4+a & 1+a \end{pmatrix}$ es:

a. 1 si a=0

b. 3 si a≠0

c. 2 si a=0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2+a & 1 \\ 2 & 4+a & 1+a \end{pmatrix} \underset{F_3=F_3-2F_1}{\overset{F_2=F_2-F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & a & 1+a \end{pmatrix} \underset{F_3=F_3-F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) $a=0$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 2$ a) FALSO c) CIERTA

b) $a \neq 0 \rightarrow \text{rang } A = 3$ b) CIERTA

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.30 Se pide elegir la opción correcta, si existe:

a. Un sistema $\boxed{\text{homogéneo}}$ es siempre compatible determinado ⇒ FALSA

$$AX = 0 \qquad (A|B) = (A|0) \qquad \text{rang } A = \text{rang } A|B \Rightarrow \text{compatible}$$

b. Existe una solución común a cualquier sistema homogéneo

$$AX=0 \longrightarrow X=0 \Rightarrow \boxed{\text{CIERTA}}$$

c. Un sistema homogéneo puede ser incompatible. ⇒ FALSA

1.31 Los valores de a y b que hacen que el sistema dado por

(a-1)x + 2y = 0 (a+b)x – y = 0 bx – 4y = 0

sea compatible e indeterminado cumplen la condición:

a. a+b = 1 $\boxed{\text{b. a+b = -1}}$

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y = 0 \\ (a+b)x - y = 0 \\ bx - 4y = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a-1 & 2 & 0 \\ a+b & -1 & 0 \\ b & -4 & 0 \end{array}\right)$$

rang A|B < 3 (columna de 0s)

rang A ≤ 2 (como mucho 2, su dim. menor)

$$\text{rang } A = \text{rang } A|B \underset{\underset{\text{SCI}}{\uparrow}}{=} 1 < \text{nº incóg} = 2$$

$$\begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a+b & -1 \end{vmatrix} = -a+1-2a-2b = -3a-2b+1=0$$

$$\begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ b & -4 \end{vmatrix} = -4a+4-2b = 0$$

$$\begin{vmatrix} a+b & -1 \\ b & -4 \end{vmatrix} = -4a-4b+b = -4a-3b = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a+2b=1 \\ 4a+2b=4 \\ 4a+3b=0 \end{array}\right\} \quad a=3 \qquad \begin{array}{c} 9+2b=1 \\ \downarrow \\ b=-4 \end{array}$$

$$\Rightarrow 12+(-12)=0$$

$$a=3 \quad b=-4$$

1.32 El sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ bx + ay + 2z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$ es :

a. compatible indeterminado si a=2 y b≠3 $\Rightarrow \boxed{\text{FALSO}}$

b. compatible determinado si a≠2 y b=3 $\Rightarrow 7a - 24 + 10 \neq 0 \rightarrow a \neq 2 \Rightarrow \text{SCD} \Rightarrow \boxed{\text{CIERTO}}$

c. incompatible si a=2 y b=5 $\quad a \neq 10 \quad 14 - 8b + 10 = 0 \quad b = 3 \Rightarrow$ no es SI $\rightarrow \boxed{\text{FALSO}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ b & a & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad |A| = 2a - 5b + 30 + 5a - 20 - 3b = 7a - 8b + 10 = 0$$

si $7a - 8b + 10 \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A = 3 = \text{rang}\, A|B = \text{n° incóg} \Rightarrow \text{SCD}$

si $7a - 8b + 10 = 0 \Rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8 \neq 0 \quad \text{rang}\, A = 2$

- si $a = 10,\ b = 10 \quad \text{rang}\, A = 2 = \text{rang}\, A|B < n$ SCI
- si $a \neq 10 \quad \text{rang}\, A = 2 \neq \text{rang}\, A|B = 3$ SI

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ \frac{7a+10}{8} & a & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ \frac{7a+10}{8} & a & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\left(\frac{35a+50}{8} - 5a\right) \quad \text{si } a = 10 \rightarrow 2 \cdot (50 - 50) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ \frac{7a+10}{8} & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\left(\frac{7a+10}{8} - 10\right) \quad \text{si } a = 10 \Rightarrow 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(a - 10) = 0 \rightarrow a = 10$$

1.33 Calcúlese el conjunto de soluciones de los sistemas siguientes dependiendo del valor de sus parámetros.

a. El sistema dado por

(a-1)x + 2y = 0 (a+b)x - y = 0 bx - 4y = 0

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y = 0 \\ (a+b)x - y = 0 \\ bx - 4y = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cc|c} a-1 & 2 & 0 \\ a+b & -1 & 0 \\ b & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}\, A|B = \text{rang}\, A$ cuando $\text{rang}\, A = 1 \quad \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a+b & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -1 \\ b & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ b & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = 3 \quad b = -4$

si $a = 3$ y $b = -4 \quad \text{rang}\, A = 1 = \text{rang}\, A|B < n \Rightarrow \text{SCI}$

$$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y = 1 \rightarrow x + 1 = 0 \quad x = -1 \end{array}$$

$$\boxed{(x, y) = (-1, 1)}$$

si $a \neq 3$ o $b \neq -4 \quad \text{rang}\, A = 2 = \text{rang}\, A|B = n \Rightarrow \text{SCD}$

$\hookrightarrow$ homogéneo $\Rightarrow \boxed{(x, y) = (0, 0)}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ bx + ay + 2z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ b & a & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

si $7a-8b+10=0$

si $a=10=b$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 10 & 10 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5/2 & 7/2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$z=\lambda$

$-5y+7\lambda=-10 \quad y=\frac{+10+7\lambda}{+5}$

$2x+\frac{30+21\lambda}{5}-\lambda=2 \Rightarrow 2x=-4-\frac{16}{5}\lambda \Rightarrow x=-2-\frac{8}{5}\lambda$

si $a\neq10$ → SI ∄ solución

si $7a-8b+10\neq0$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{7a-8b+10}=\frac{2(a-10)}{7a-8b+10}=\frac{2a-20}{7a-8b+10}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ b & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{7a-8b+10}=\frac{-2(b-10)}{7a-8b+10}=\frac{20-2b}{7a-8b+10}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ b & a & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{7a-8b+10}=\frac{2(5b-5a)}{7a-8b+10}$$

1.34 Comprobar si son equivalentes los sistemas:

$S_1 = \begin{cases} 2x + 4y - 3z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \\ 8x + 16y - 11z = -8 \end{cases}$ $\qquad S_2 = \begin{cases} 3x + 6y - 4z = -3 \\ 2x + 4y - 2z = -4 \\ 5x + 10y - 7z = -1 \end{cases}$

$S_3 = \begin{cases} 2x + 4y - 3z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$ $\qquad S_4 = \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

$x+2y=-1 \quad x=-1-2\lambda$

→ S_1 SCI $\quad z=0 \quad y=\lambda$

$$S_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 16 & -11 & -8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 16 & -11 & -8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

S_1 y S_2 } no son equivalentes

$$S_2=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & 10 & -7 & -1 \end{array}\right)\overset{F_1 \leftrightarrow \frac{F_2}{2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & -4 & -3 \\ 5 & 10 & -7 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

→ S_2 es SI

$$S_3=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & -2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{array}\right)$$

S_1 y S_3 equivalentes

$$S_4=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

S_4 no es equivalente a ninguna

1.35 Las ecuaciones $\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \beta + 1 \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, representan las ecuaciones paramétricas de un sistema. Se pide calcular unas ecuaciones cartesianas de dicho sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\alpha \\ y = \beta+1 \\ z = \alpha-\beta \end{array}\right\} \xrightarrow{\alpha = \frac{x}{2}} \left.\begin{array}{l} y = \beta+1 \\ z = \frac{x}{2}-\beta \end{array}\right\} \xrightarrow{\beta = y-1} z = \frac{x}{2} - (y-1)$$

$$2z = x - 2y + 2$$

$$\boxed{x - 2y - 2z = -2}$$

1.36 Calcúlense las ecuaciones paramétricas del sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$z = \lambda$$

$$y - 3\lambda = 1 \Rightarrow y = 1 + 3\lambda$$

$$x - (1+3\lambda) + 2\lambda = 2 \Rightarrow x = 3 + \lambda$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

1.37 Se pide resolver por el método de Gauss el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ -x + y - 3z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{F_2=\frac{F_2}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-2F_1}{\overset{F_2=F_2+F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{array}\right) \overset{F_2=2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 12 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3=F_3+2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 19 \end{array}\right) \underset{F_3=\frac{F_3}{-6}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{6} \end{array}\right)$$

$$\boxed{z = -\frac{19}{6}}$$

$$\longrightarrow y - 5\left(-\frac{19}{6}\right) = 12 \quad \boxed{y = -\frac{23}{6}}$$

$$\longrightarrow x - \frac{1}{2}\,\frac{-23}{6} + \frac{1}{2}\,\frac{-19}{6} = 4 \quad \boxed{x = \frac{11}{3}}$$

1.38 En la descomposición LU de A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, la matriz L es:

$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \triangle & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad U = \begin{pmatrix} & & \nabla \\ 0 & & \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -7/4 & 1 \end{pmatrix}$ ~~b. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$~~ ~~c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_2 - 3F_1}{\overset{\overset{-(-F_1)}{\downarrow}}{\underset{\sim}{F_2 = F_2 + F_1}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3 + \frac{7}{4}F_2}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -7/4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.39 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + by + z = 1 \\ y + az = b \\ x + (b-1)y + 2z = 1 \end{cases}$ es compatible indeterminado cuando los valores de a y b son:

~~a~~. a=-1, b≠0 ~~b~~. a≠-1, b≠0 ~~c~~. a=b=-1 $\boxed{\text{d. Otros}}$

↳ $a=-1$ y $b=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & b-1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1+a & b \end{array}\right)$$

↳ $1+a=0$ $\boxed{a=-1}$ $\text{rang } A=2$
- $b=0$ $\text{rang } A|B = 2 \neq n$ → $\boxed{SCI}$
- $b\neq 0$ $\text{rang } A|B = 3$ → SI

↳ $1+a\neq 0$ $\boxed{a\neq -1}$ $\text{rang } A = 3 = \text{rang } A|B = n$ SCD

1.40 Se pide clasificar el sistema del ejercicio anterior para los distintos valores de los parámetros a y b mediante el método de eliminación Gaussiana.

si $a=-1$ y $b=0$ → SCI

si $a=-1$ y $b\neq 0$ → SI

si $a\neq -1$ ⟶ SCD

1.41 Si AX=B, se pide elegir la opción correcta:

a. Si el sistema tiene 5 incógnitas, 4 ecuaciones y rangA=4, el sistema es compatible y su solución se puede hallar mediante el método de Gauss-Jordan. ⇒ FALSO

b. Si A es regular, el sistema es compatible determiando ⇒ CIERTO

c. Si la matriz ampliada tiene 4 columnas, $B=(0,0,0)^t$ y rangA=2, el sistema solo tiene la solución nula. ⇒ FALSO

a) $A \to 4 \times 5$ $\quad \text{rang}\, A = 4 = \text{rang}\, A|B < n = 5$ $\quad$ S.C.I ⇒ lo resuelve por Gauss-J.

b) A regular ⇒ $\exists A^{-1}$ $\quad AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow$ SCD

c) $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$ $\quad \text{rang}\, A = 2$

$A \Rightarrow 3 \times 3$

$A|B \Rightarrow 3 \times 4$ ⇒ homogénea $\quad \text{rang}\, A|B = 2 = \text{rang}\, A < n = 3 \Rightarrow$ SCI $\quad \exists\, \infty$ sol

1.43 La factorización LU de una matriz A cuadrada verifica:

a. Siempre existe. ⇒ FALSO

b. Permite resolver sistemas de ecuaciones mediante sistemas triangulares. ⇒ CIERTA

c. Permite calcular el determinante de A vía el determinante de U. ⇒ CIERTO

d. Ninguna de las anteriores.

b) $AX = B \Rightarrow \underbrace{LUX}_{y} = B$

$$Ly = B \qquad \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)$$

$$UX = y \qquad \left(\begin{matrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots\, 0 & u_{mn} \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{matrix}\right)$$

c) $|A| = |LU| = |L|\,|U| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ \triangle & \ddots & 0 \\ & & 1 \end{vmatrix} |U| = 1\,|U| = |U|$

1.44 Calcúlese la factorización LU de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ para resolver el sistema AX== $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3=F_3-\frac{3}{2}F_1}{\overset{F_2=F_2-\frac{1}{2}F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3=F_3+5F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow L\underbrace{UX}_{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$Ly \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & -5 \\ 3/2 & -5 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$y_1 = 0$

$0 + y_2 = -5$

$0 + 25 + y_3 = 7 \qquad y_3 = -18$

$$Ux = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$-6z = -18 \qquad \boxed{z=3}$

$-2y - 3 = -5 \qquad -2y = -2 \qquad \boxed{y=1}$

$2x - 2 + 12 = 0 \qquad 2x = -10 \qquad \boxed{x=-5}$