CONCEPTOS MATEMÁTICOS

1. MATRICES

1.6 Calcúlese A^3 sabiendo que A es la matriz cuyas filas son (0, cos x, sen x) ,

(cos x, 0, -1) y (sen x, 1, 0)

1.7 A es la matriz de filas (0, a, 0), (0, 0, b) y (c, 0, 0) siendo a,b,c $\in \mathbb{R}$. De entre las siguientes opciones elija la correcta:

a. A3 es una matriz escalar.

b. An es una matriz escalar para todo n$\in \mathbb{N}$

1.8 Se pide determinar la opción cierta, sabiendo que las matrices A y B satisfacen $A+B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

a. $A^2+B^2=\begin{pmatrix}12 & 6\\ \frac{19}{2} & \frac{11}{2}\end{pmatrix}$

b. $(A+B)^2=\begin{pmatrix}9 & 4\\ 49 & 0\end{pmatrix}$

c. $A^2-B^2=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 14 & 21\end{pmatrix}$

1.9 Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Se pide calcular la suma: $S = A+AB+AB^2+AB^3+\ldots+AB^n$

a. $S=\begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & 0\\ 0 & \frac{3^{n+1}-1}{2}\end{pmatrix}$

b. $S=\begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & 0\\ 0 & 3^{n+1}-1\end{pmatrix}$

1.10 Suponiendo que I_n-A es una matriz regular siendo $A\in \mathcal{M}_{nxn}$, calcúlese la matriz inversa de I-A en función de potencias de A sabiendo que $A^3=0$.

1.11 Si A y B son matrices cuadradas de orden n tales que AB=A y BA=B, se verifica:

a. Si A es regular, entonces $B \neq I_n$.

b. $A^2=A$ y $B^2=B$.

1.12 Se pide elegir las respuestas correctas:

a. Las matrices elementales son cuadradas.

b. Las matrices elementales son regulares.

c. Las matrices elementales permiten calcular la matriz inversa de una matriz regular.

1.13. Se pide justificar si las matrices son o no son elementales:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.14 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, se pide calcular las siguientes matrices y la matriz de paso asociada a cada una de ellas:

- Una matriz reducida de A

- Una matriz escalonada reducida de A con los pivotes normalizados

- La forma escalonada reducida de A

1.15 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y las matrices elementales $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide calcular e interpretar los productos:

E_1A

E_2A

E_3A

AE_1

AE_2

AE_3

1.16 Calcúlese, si es posible, la inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

1.17 ¿Es cierto que rang(A)+rang(B) = rang(A+B) siendo A, B $\in \mathcal{M}_{mxn}$?

1.18 Calcúlese el rango de las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.19 Si A y B son matrices no cuadradas de orden m x n, se pide decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones:

a. Si A y B son equivalentes por filas, rang(A)=rang(B)

b. Si A y B son equivalentes por columnas, rang(A)=rang(B)

1.20 Si A, B ∈ $\mathcal{M}_{mxn}$ y existen P y Q matrices regulares tales que B=PAQ se pide justificar la relación anterior en términos de operaciones elementales y decidir si rang(A) = rang(B).

2. DETERMINANTES

1.21 Calcúlese el determinante de la matriz A de filas (1,2,m,4) , (3,2,1,m), (0,1,4,0) y (3m,5,1,2) mediante el desarrollo de la columna C_4 siendo m∈ $\mathbb{R}$

1.22 Si a15a2ia3ja42a53 es un término del desarrollo de un determinante de orden 5, dicho término debe llevar signo negativo cuando (i,j) sea:

a

. (1,4)

b.(4,1)

c. Lo es siempre

1.23 Se pide calcular, si es posible, el determinante de las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.24 Si A es la matriz de filas (-1,-5, -7), (2,5,6) y (1,3,4), hállese la tercera columna de A^{-1}.

1.25 Si A es una matriz cuadrada real de orden n y B la matriz traspuesta de la matriz adjunta de A, se pide calcular el rango de B suponiendo que rang(A)=n.

1.26 Si A es una matriz cuadrada de orden 4 en cuyas filas se hacen las siguientes transformaciones: multiplicar por ½ la primera, multiplicar por 1/3 la segunda, restar a la tercera el doble de la cuarta y calcular su traspuesta, obtenemos una matriz B que verifica:

a. |A| = |B|

b. |A| =6|B|

c. |A| = (2 – 1/6) |B|

1.27 Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, calcúlese $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

1.28 Calcúlese el determinante de la matriz de filas (x,a,b,c), (a,x,0,0), (b,0,x,0), (c,0,0,x).

1.29 El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2+a & 1 \\ 2 & 4+a & 1+a \end{pmatrix}$ es:

a. 1 si a=0

b. 3 si a≠0

c. 2 si a=0

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.30 Se pide elegir la opción correcta, si existe:

a. Un sistema homogéneo es siempre compatible determinado

b. Existe una solución común a cualquier sistema homogéneo

c. Un sistema homogéneo puede ser incompatible.

1.31 Los valores de a y b que hacen que el sistema dado por

$(a-1)x + 2y = 0$ $\quad (a+b)x - y = 0 \quad$ $bx - 4y = 0$

sea compatible e indeterminado cumplen la condición:

a. $a+b = 1$ $\quad$ b. $a+b = -1$

1.32 El sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ bx + ay + 2z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$ es :

a. compatible indeterminado si a=2 y b≠3

b. compatible determinado si a≠2 y b=3

c. incompatible si a=2 y b=5

1.33 Calcúlese el conjunto de soluciones de los sistemas siguientes dependiendo del valor de sus parámetros.

a. El sistema dado por

$(a-1)x + 2y = 0 \qquad (a+b)x - y = 0 \qquad bx - 4y = 0$

b. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ bx + ay + 2z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$

1.34 Comprobar si son equivalentes los sistemas:

$$S_1 = \begin{cases} 2x + 4y - 3z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \\ 8x + 16y - 11z = -8 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} 3x + 6y - 4z = -3 \\ 2x + 4y - 2z = -4 \\ 5x + 10y - 7z = -1 \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} 2x + 4y - 3z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases} \qquad S_4 = \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

1.35 Las ecuaciones $\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \beta + 1 \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, representan las ecuaciones paramétricas de un sistema. Se pide calcular unas ecuaciones cartesianas de dicho sistema.

1.36 Calcúlense las ecuaciones paramétricas del sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

1.37 Se pide resolver por el método de Gauss el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ -x + y - 3z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 3 \end{cases}$$

1.38 En la descomposición LU de A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, la matriz L es:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -7/4 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.39 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + by + z = 1 \\ y + az = b \\ x + (b-1)y + 2z = 1 \end{cases}$ es compatible indeterminado cuando los valores de a y b son:

a. a=-1, b≠0 b. a≠-1, b≠0 c. a=b=-1 d. Otros

1.40 Se pide clasificar el sistema del ejercicio anterior para los distintos valores de los parámetros a y b mediante el método de eliminación Gaussiana.

1.41 Si AX=B, se pide elegir la opción correcta:

a. Si el sistema tiene 5 incógnitas, 4 ecuaciones y rangA=4, el sistema es compatible y su solución se puede hallar mediante el método de Gauss-Jordan.

b. Si A es regular, el sistema es compatible determiando

c. Si la matriz ampliada tiene 4 columnas, $B=(0,0,0)^t$ y rangA=2, el sistema solo tiene la solución nula.

1.43 La factorización LU de una matriz A cuadrada verifica:

a. Siempre existe.

b. Permite resolver sistemas de ecuaciones mediante sistemas triangulares.

c. Permite calcular el determinante de A vía el determinante de U.

d. Ninguna de las anteriores.

1.44 Calcúlese la factorización LU de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ para resolver el sistema AX== $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$