SUBESPACIOS VECTORIALES

1. ESPACIO y SUBESPACIO VECTORIAL

2.1 Si $V=\{(a,b)\in\mathbb{R}|a>0\}$ y $(a,b)*(c,d)=(ac,b+d)$, el elemento neutro de (V,*) verifica:

a. Es (0,0) b. Existe y pertenece a V. c. No existe

2.2 Compruébes si $\lambda\cdot(x_1,x_2)=(\lambda x_1,0)$(operación de escalares con pares de $\mathbb{R}^2$) verifica las siguientes propiedades:

a. Distributiva de los escalares respecto a los vectores

b. Distributiva de los vectores respecto a los escalares.

c. Asociativa $(\lambda\mu)\cdot\bar{x}=\lambda\cdot(\mu\cdot\bar{x})$

d. Existencia de escalar unidad

2.3 El conjunto $= \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}^+, x_2 \in \mathbb{R}\}$ con la operación

$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 + y_2)$verifica:

a. Es asociativo

b. Existe elemento neutro

c. Todo elemento tiene un simétrico

d. Es grupo conmutativo

2.4 Se pide comprobar si la operación $x * y = xy + 1$ en el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ verifica alguna de las propiedades:

a. Asociativa

b. Existe elemento neutro

c. Conmutativa

2.5 Se pide demostrar que (U,+) no es subgrupo de $(\mathbb{R}^2, +)$ si

U={ $(x_1, x_2) | x_1 x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

2.6 Se pide justificar si alguno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

a. $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 = 1\}$

b. $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_2\}$

c. $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_2 = 1\}$

d. $D = \{(x_1, x_2, 0,0) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 = 0\}$

2.7 Se pide justificar si el subconjunto $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = x_2\}$de $\mathbb{R}^2$ verifica:

a. (U,+) no es grupo conmutativo

b. (U,+) no es subgrupo de $(\mathbb{R}^2$,+)

c. (U,+, $\mathbb{R}$) es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$

2.8 Se pide justificar si cualquier espacio vectorial real (V,*, $\mathbb{R}$) tiene como subespacios vectoriales:

a. El conjunto vacío

b. El conjunto formado por el elemento neutro de (V,*)

c. El conjunto formado por el número real 1.

2.9 Se pide justificar si son subespacios de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$:

a. Cualquier recta de $\mathbb{R}^3$

b. Cualquier plano de $\mathbb{R}^3$

c. $\{(0,0,0)\}$

d. $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$

2.10 Se pide justificar si el conjunto de polinomios reales de grado cuatro con las operaciones estándar de sumar polinomios y multiplicar polinomios por escalares verifica:

a. La suma de dos de sus elementos pertenece al conjunto

b. Un escalar por un polinomio del conjunto pertenece al conjunto

c. Es espacio vectorial.

2.11 Se pide justificar si el conjunto de polinomios reales de grado menor o igual que cuatro con las operaciones estándar de sumar polinomios y multiplicar polinomios por escalares verifica:

a. La suma de dos de sus elementos pertenece al conjunto

b. Un escalar por un polinomio del conjunto pertenece al conjunto

c. Es subespacio vectorial del espacio de polinomios reales

d. Es espacio vectorial

2.12 Si U y V son subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$. Se pide demostrar que $U \cap V$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$.

2.13 Si U y V son subespacios de $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ se pide demostrar si se verifica:

a. La suma de dos elementos de U∪V está en U∪V

b. Un número real por un elemento de U∪V está en U∪V

c. U∪V es un subespacio de $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$.

2.14 Se pide comprobar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales:

a. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + 2y - 3z = 0\}$

b. $B = \{ax^2 + b \in \mathbb{R}_2[x] |\ a - b = 0\}$

c. $C = \{A \in \mathcal{M}_{2x2} |\ a_{11} = a_{22}\ y\ a_{12} + 2a_{21} = 0\}$

2. SISTEMAS GENERADORES

2.15 Se pide comprobar si es cierto que el vector (2,3,0) es combinación lineal de los pares de vectores siguientes y, en su caso, la combinación lineal que lo genera:

a. (0,0,1) y (0,1,0)

b. (1,0,0) y (0,1,0)

c. (1,0,0) y (0,0,1)

2.16 Se pide encontrar entre las opciones siguientes las combinaciones lineales que generan el vector (2,3,2):

a. (1,1,1) (2,0,2) y (3,4,3)

b. (1,1,1) y (3,4,3)

c. (2,0,2) y (3,4,3)

2.17 Se pide comprobar si el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, U: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, puede ser generado por:

a. {(1,0,-1)}

b. {(1,0,-1), (0,1,-1)}

c. {(0,1,0)}

2.18 (Ampliación del 2.17) Se pide comprobar si son generadores del subespacio vectorialU:$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ los conjuntos:

a. $S_1 = \{(1,0,-1), (0,2,-2)\}$

b. $S_2 = \{(1,0,-1), (0,1,-1), (1,1,-2)\}$

c. $S_3 = \{(1,0,-1), (0,1,-1), (1,1,-2), (3,0,-3)\}$

d. $S_4 = \{(1,1,-2),(3,0,-3)\}$

e. S, S_1,S_2,S_3 y S_4 son equivalentes.

2.19 Se pide calcular los valores que deben tener m y n para que el vector (1,-1,m,n) de $\mathbb{R}^4$ pertenezca al subespacio vectorial generado por

S={(2,1,3,4), (1,2,-1,2), (1,-1,4,2)}

2.20 Se pide halla los valores de x e y para que las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ean linealmente dependientes.

2.21 Se pide comprobar si {(-1,1,2), (a,0,b)}$\subset \mathbb{R}^3$verifica:

a. Es un sistema libre para valores cualesquiera de a y de b

b. Puede ser un sistema ligado

c.Genera un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1.

2.22 Se pide calcular el valor de c para que el vector (1,-2,c) pertenezca al subespacio generado por $S_1 = \{(3,0,-2),(2,-1,-5)\}$

3. BASES, DIMENSIÓN Y COORDENADAS

2.23 Si $B = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}\}$ es una base de un espacio vectorial V, se pide comprobar si también son bases de V los conjuntos:

a. $B_1 = \{\overline{e_1}, \overline{e_1} + \overline{e_2}, \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3} + \overline{e_4}\}$

b. $B_2 = \{\overline{e_1}, \overline{e_1} + \overline{e_2}, \overline{e_1} - \overline{e_2}, \overline{e_1} + \overline{e_3}, \overline{e_4}\}$

c.$B_3 = \{\overline{e_1}, \overline{e_1} + \overline{e_2}, \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}, \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3} + \overline{e_4}\}$

2.24 El conjunto S={(1,2,1),(2,1,0),(4,-1,-4)} verifica:

a. Es una base de $\mathbb{R}^2$

b. Todo vector de $\mathbb{R}^3$es combinación lineal de los vectores de S.

c.Es un sistema linealmente dependiente o ligado.

2.25 Se pide elegir de las siguientes opciones, las verdaderas:

a. El vector 1 es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}$

b. Existen espacios vectoriales de dimensión finita, distintos del $\bar{0}$, que no tienen bases.

2.26 Si B={(1,1,1),(1,1,0), (1,0,0)} y $\bar{v} = (3,2,1)$ está expresado respecto a la base canónica, se pide:

a. Comprobar que B es una base de $\mathbb{R}^3$

b. Calcular las coordenadas de $\bar{v}$ respecto a B.

2. 27. Si $B = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}\}$ y $B' = \{\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \overline{e'_3}, \overline{e'_4}\}$ son dos bases de $\mathbb{R}^4$, tales que

$\overline{e'_1} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$, $\overline{e'_2} = \overline{e_2}, \overline{e'_3} = \overline{e_2} - \overline{e_3}$, $\overline{e'_4} = \overline{e_2} - 4\overline{e_3} - 2\overline{e_4}$y las coordenadas de $\bar{v} \in \mathbb{R}^4$respecto a la base B' son (2,-1,0,1). Se pide halla las coordenadas de $\bar{v}$ respecto a B.

2.28 Si a≠0 es un valor real determinado, se pide comprobar si la dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores de la forma (-a,a,-2a,3a) depende del valor de a.

2.29 Si $\wp_2$es el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor que 3 y una variable, se pide demostrar si $S = \{x^2, x^2 + x\}$ es una base de dicho espacio.

2. 30 Si $B = \{P(x), P'(x), P''(x), P'''(x)\}$ es una base del espacio vectorial de polinomios reales de grado menor o igual que 3 y una variable, siendo $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$; se pide calcular las coordenadas de $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$ respecto a la base B.

4. OPERACIONES ENTRE SUBESPACIOS

2.31 Sabiendo que $L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 = 0\}$ y $L_2 =< (-1,0,2), (0,1,1) >$ se pide:

a. Ecuaciones y dimensión del subespacio $L_1 \cap L_2$

2. 32 Siendo $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 = 0, x_2 = x_3\}$ y $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_1 = 0\}$ se pide:

a. Unas ecuaciones paramétricas de $H + G$

b. Comprobar si $H + G$ es suma directa.

2.33 Sean E el subespacio de R^3 generado por (1,0,-1) y (0,1,-1) y F el subespacio generado por (1,1,-2), (2,1,-3) y (0,1,-1), se pide:

a. Demostrar que E=F

b. Ecuaciones cartesianas de F

2.34 Se pide comprobar si los conjuntos $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_4 = -x_3\}$, subespacio de $\mathbb{R}^4$, y $B_1 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,-1)\}$ y $B_2 = \{(0,0,0,1)\}$ verifican:

a. B_1 es base de U_1

b. B_2es base de un suplementario, U_2, de U_1

c.Una base de U_1y otra de U_2forman base de $\mathbb{R}^4$

d. La dimensión de $U_1 \cap U_2$ es cero

2.35 Siendo $L_1 =< (1,0,0),(0,0,1) >$ y $L_2 =< (1,1,1) >$, se pide comprobar si se verifica:

a. $L_1 \cap L_2$ no es un subespacio vectorial

b. $(x_1, x_2, x_3) = \alpha\ (1,1,1)$ son ecuaciones paramétricas de $L_1 \cap L_2$

c. $L_1 + L_2$ es suma directa

d.Hay distintas posibilidades de descomponer el vector (2,5,9) como suma de un vector de L_1y uno de L_2

2.36 Si L_1 y L_2 son $L_1 =< (1,0,1,1), (1,0,0,0), (0,0,1,1) >$ y

$L_2 =< (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) >$, se pide estudiar las dimensiones de L_1 , L_2, $L_1 \cap L_2$ y de la suma $L_1 + L_2$

2.37 Si A es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por {(1,2,1,1),(-1,0,1,0), (2,2,0,1)} y $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$ es otro subespacio de $\mathbb{R}^4$, se pide estudiar las dimensiones de A y de B, y demostrar si se verifica que $A + B = A \oplus B$