EX FEBRERO 2024 S1 - CÁLCULO GRADO ECONOMÍA UNED

PROBLEMA 1

Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 en un entorno de x=0 para la función: $f(x)=xe^x$

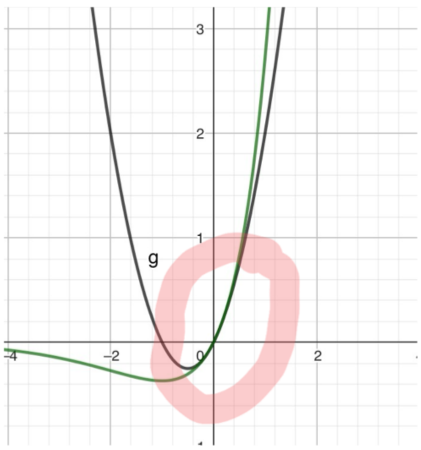
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$f(0) = 0\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0$$

$$f'(0) = 1\cdot e^x + xe^x = e^x(1+x) \Rightarrow f'(0) = e^0\cdot 1 = 1$$

$$f''(0) = e^x(1+x) + e^x\cdot 1 = e^x(1+x+1) \Rightarrow f''(0) = (2+0)\cdot e^0 = 2$$

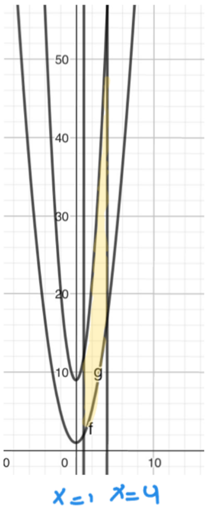
$$P_2(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{2}{2!}x^2 \Rightarrow \boxed{P_2(x) = x + x^2}$$



PROBLEMA 2

Calcula el área de la región comprendida entre las curvas: $f(x)=x^2+1$; $g(x)=3x^2+9$ y las rectas $x=1$ y $x=4$.

$a>0$ ∪



$f(x)=g(x)$

$x^2+1=3x^2+9$

$-8=2x^2$!!

$$\left|\int_1^4 3x^2+9-(x^2+1)\,dx\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^4 (2x^2+8)\,dx = 2\frac{x^3}{3}+8x\Big]_1^4 =$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$=\left(2\cdot\frac{4^3}{3}+8\cdot 4\right)-\left(2\cdot\frac{1^3}{3}+8\cdot 1\right)=2\cdot\frac{64}{3}+32-\frac{2}{3}-8$$

$$=66\,u^2$$

PROBLEMA 3

Halla el gradiente de la siguiente función en (1, -1, 1): $f(x,y,z)=3x^2yz+3xy^2z+3xyz^2$

$$\nabla f(x,y,z)=\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}_{f'_x},\ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)}_{f'_y},\ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)}_{f'_z}\Big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\underbrace{3yz\cdot 2x}_{6xyz}+3y^2z+3yz^2\Big|_{(1,-1,1)}=-6+3-3=-6$$

y, z const

$(1,-1,1)$ → x y z

x, z const

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3x^2z+\underbrace{3xz\cdot 2y}_{6xyz}+3xz^2\Big|_{(1,-1,1)}=3+(-6)+3=0$$

x, y const

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3x^2y+3xy^2+\overbrace{3xy\cdot 2z}^{6xyz}\Big|_{(1,-1,1)}=-3+3-6=-6$$

$$\nabla f(1,-1,1)=(-6,0,-6)$$

info@tuacademiafacil.com

PROBLEMA 4

Enunciar el criterio de Cauchy o de la raíz

$\{a_n\}$ serie de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \quad \begin{cases} R \in [0,1) & \sum a_n \text{ converge} \\ R = 1 & \text{criterio no decide} \\ R > 1 \ (R = \infty) & \sum a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3n)^n}{(4n^2+5)^n}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\frac{(n^2+3n)^{\cancel{n}}}{(4n^2+5)^{\cancel{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n)}{(4n^2+5)} = \frac{1}{4}$$

$R = \frac{1}{4} \in [0,1) \Rightarrow \sum a_n$ convergente.

info@tuacademiafacil.com

PROBLEMA 5

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x)}$, calcula el dominio y estudia la existencia de asíntotas.

$\ln x \neq 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x=1 \quad (x \neq 1)$

$\ln(x) \quad x>0 \Rightarrow [0,+\infty)$

Domini: $\{x \in \mathbb{R},\ x>0,\ x\neq 1\}$

A. vertical

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln 1^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ A. vertical en $x=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{\ln x} = \dfrac{0}{\ln 0^+} = 0$

A. Horitzontal

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Ind $\xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{1/x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2 = +\infty$

No hay A. Horitzontal

A. oblicua: $y = mx+n$

$m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x} : x = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x \cdot \ln x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1/x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$

No hay A. oblicuas.

Determine intérvalos de crecimiento y decrecimiento $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$ dom $\Rightarrow \{x \in \mathbb{R},\ x>0,\ x \neq 1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{2x \cdot \ln x - x}{(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow x(2\ln x - 1) = 0$

$\cancel{x=0}$ $\nexists$

$2\ln x = 1$

$\ln x = 1/2$

$x = e^{1/2} = \sqrt{e}$

0 $\quad$ 1 $\quad$ $\sqrt{e}$

$f'(0'5)$: $\dfrac{1 \cdot \ln 0'5 - 0'5}{(\ln 0'5)^2} < 0$

$f'(1'5)$ $\hat{0}$

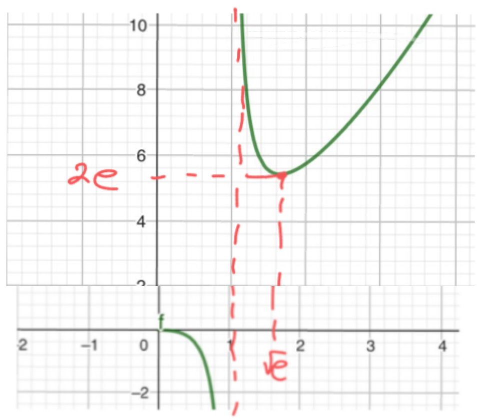
$f'(2) > 0$

sol: decrece: $(0,1) \cup (1, \sqrt{e})$. Crece $(\sqrt{e}, +\infty)$.

Determina extremos relativos

en $x=\sqrt{e}$ mínimo relativo $(\sqrt{e}, 2e)$.

$f(e^{1/2}) = \dfrac{(\sqrt{e})^2}{\ln e^{1/2}} = \dfrac{e}{1/2} = 2e$



PROBLEMA 6

Una compañía tiene la siguiente función de beneficios para la venta de los productos (x,y). $f(x,y)=800x+1200y-x^2-2y^2-2xy$. Determina cuantos productos de cada tipo se necesitan vender para obtener máximo beneficio.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 800 - 2x - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad x + y = 400$$

$\downarrow$ y const

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 1200 - 4y - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 600$$

$\downarrow$ x const

$$-y = -200 \Rightarrow y = 200$$

$$x + 200 = 400$$

$$x = 200$$

Matriz Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xx} = f''_{xx} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx} = f''_{yx} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial yy} = -4$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$Hf(200,200) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H = 8 - 4 = 4 > 0 \\ H_1 = -2 < 0 \end{array}\right\} \text{def negativa} \Downarrow \text{máximo}$$

El beneficio máximo: $\Rightarrow f(200,200) = 200.000$ €