MACROECONOMÍA AVANZADA
Tema 1. El Modelo de Solow

1. Introducción

La Teoría del Crecimiento es la parte de la macroeconomía que estudia el comportamiento a largo plazo de la economía. Hasta los años 80-90, la Teoría del Crecimiento se ocupaba de los países desarrollados, mientras que la Teoría del Desarrollo se centraba en los países en desarrollo. La diferenciación de las teorías se debía a que se consideraba que los países se comportaban diferente a largo plazo ya que eran economías distintas. De esta manera:

Países Desarrollados → mercados competitivos, pocas externalidades y rigideces; rendimientos constantes a escala.

Países En Desarrollo → mercados rígidos, intervenidos e imperfectos; rendimientos crecientes a escala.

A partir de los años 80-90, se muestra que la Teoría del Crecimiento podía estudiar tanto a los países desarrollados como a los de en desarrollo → se unifica crecimiento y desarrollo.

En la actualidad, la Teoría del Desarrollo se centra en aspectos microeconómicos de las economías de África, Asia y América Latina, basándose en contribuciones fundamentalmente empíricas.

La Teoría del Crecimiento trabaja con variables que son función del tiempo:

Output: $Y = f(t)$

Capital: $K = g(t)$

Trabajo: $L = h(t)$

El punto de partida de esta teoría son los *hechos estilizados*, que son regularidades empíricas que se observan al analizar el comportamiento de los países:

1. Los niveles de renta per cápita varían notablemente entre países (pudiéndose medir esta renta per cápita en precios corrientes, o para ser más rigurosos considerando el nivel de vida de cada país a través de la paridad del poder adquisitivo (ppp)).

2. En un momento dado del tiempo puede existir gran variación en las tasas de crecimiento entre las economías.

3. Hay gran variación en las tasas de crecimiento de un país a lo largo del tiempo.

4. Los incrementos en renta per cápita no son uniformes entre países; por tanto, la posición relativa de los países en cuanto a renta per cápita cambia en el tiempo.

5. La correlación entre crecimiento y comercio internacional es positiva.

De estos hechos se obtiene que un país puede crecer de forma diferente según el momento del tiempo, y que países de un área geográfica pueden crecer a tasas diferentes. Las variaciones en las tasas de crecimientos van a resultar en variaciones en el bienestar de la población. La historia ha mostrado que se pueden dar desastre de crecimiento, pero también milagros de crecimiento como fue el caso de Corea y China.

2. Modelo de Solow: supuestos

a) La economía produce un único bien, que se consume o se ahorra.

b) La función de producción emplea trabajo L y capital K para producir el output Y:

$$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha} \;\; con\; 0 < \alpha < 1$$

Propiedades de la función de producción:

- ➔ Y, L y K son función del tiempo.
- ➔ La función de producción es del tipo Cobb-Douglas.
- ➔ Es homogénea de grado 1 en trabajo y capital → consecuencia de que se asume que hay rendimientos constantes a escala. Se puede decir también homogeneidad lineal.
- ➔ Presenta productividad marginal decreciente (es cóncava) en cada input.

Para demostrar que la productividad marginal es decreciente, vamos a hacer a continuación los ejercicios 1 y 2 del Tema 1.

Ejercicio 1. Muestre que la productividad marginal de L y K en el modelo de Solow es decreciente

Partimos de la función de producción de Solow:

$$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha} \;\; con\; 0 < \alpha < 1$$

Las productividades marginales se calculan como la derivada de la función de producción respecto al input que nos interesa:

$$PmgL = \frac{dY}{dL} = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$PmgK = \frac{dY}{dK} = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$$

Para saber si estas productividades marginales son decrecientes, tenemos que calcular su primera derivada y evaluar su signo:

$$PmgL' = \frac{dPmgL}{dL} = -\alpha(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha-1} < 0$$

$$PmgK' = \frac{dPmgK}{dK} = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0$$

Ambas son negativas, por tanto, las productividades marginales son decrecientes.

En el **Ejercicio 2** nos preguntan que, demostremos la concavidad de la función de producción en L, K. Una función es cóncava si su primera derivada es decreciente, lo que es lo mismo que decir, que la segunda derivada es negativa. Fijémonos que esto lo hemos mostrado al derivar la productividad marginal de cada uno de los inputs. Por tanto, no solo hemos mostrado que las productividades marginales son decrecientes, sino que la función de producción es cóncava tanto en L como en K.

c) Los individuos ahorrar a una tasa constante, s, de la renta (también es la proporción de inversión sobre la renta).
d) La economía es competitiva, no hay externalidades, rigideces, fricciones ni rendimientos crecientes.
e) La economía está en pleno empleo → L representa tanto a la población como al factor trabajo.
f) La población L crece a la tasa n, exógena y constante → $\frac{\dot{L}}{L} = n$, donde $\dot{L}$ es la derivada de L con respecto al tiempo (dL/dt) y $\frac{\dot{L}}{L}$ es la tasa de crecimiento de L. Si la población en el momento inicial es L(0), la población en cualquier momento del tiempo t obedece a la siguiente ecuación diferencial:

$$L(t) = L(0)e^{nt}$$

Vamos a demostrar a través del Ejercicio 3 que $\boldsymbol{\frac{\dot{L}}{L} = n}$ es $\boldsymbol{L(t) = L(0)e^{nt}}$ tal como nos piden:

En primer lugar, vamos a coger la ecuación de $L(t) = L(0)e^{nt}$ y vamos a tomar logaritmos:

LnL(t) = LnL(0) +nt Lne →recordamos que el logaritmo de e es 1→ LnL(t) = LnL(0) +nt

Diferenciamos respecto al tiempo a ambos lados:

$$\frac{\frac{dL(t)}{dt}}{L(t)} = 0 + n$$

Aplicando el hecho de que dL(t)/dt es igual a $\dot{L}$, tenemos que la expresión nos queda como: $\frac{\dot{L}}{L} = n$

g) El capital se deprecia a una tasa exógena y constante δ. La acumulación de K se lleva a cabo a través de la ecuación dinámica del capital:

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

Donde
$\dot{K}$→ inversión neta o variación del capital en el tiempo (dK/dt)
sY→ inversión bruta (tasa de ahorro por renta).
δK→ inversión de reposición (cubre la depreciación de K).
A esta ecuación también se la llama Ley de acumulación del capital físico.

Pregunta de Examen: Febrero 2023 Modelo A
En el modelo de Solow, la economía:
a) Es competitiva.
b) Opera en régimen de competencia monopolística.
c) Se compone de sectores diferentes, con características también diferentes.
d) Presenta externalidades.

Basándonos en lo estudiado, la respuesta correcta sería la a) ya que es uno de los supuestos del Modelo de Solow.

3. Modelo de Solow: discusión

Vamos a analizar la economía en términos per cápita. Las variables per cápita se definen dividiendo la variable por L (recordemos que L representa tanto al trabajo como a la población, de ahí que dividamos por el mismo).

Partimos de la ecuación inicial:

$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha} \rightarrow multiplicamos\ por\ \frac{1}{L}\ todos\ los\ factores$ para obtener los valores per cápita:

$$\frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} \rightarrow y = k^{\alpha}$$

Derivamos el capital per cápita en el tiempo → $\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L}$

Recordando la ecuación dinámica del capital:

$$\dot{K} = sY - \delta K \rightarrow \frac{\dot{K}}{L} = s\frac{Y}{L} - \delta\frac{K}{L} = sy - \delta k$$

Y que $\frac{\dot{L}}{L} = n$, podemos deducir el capital per cápita:

$$\dot{k} = sy - \delta k - nk \rightarrow sy - (\delta + n)k$$

Podemos conocer la dinámica del modelo en el estado estacionario. El estado estacionario es un concepto matemático que hace referencia al equilibrio de la ecuación diferencial asociada al modelo, siendo la situación en la que las variables relevantes crecen a tasas constantes.

En el modelo de Solow se determina que la tasa de crecimiento del capital per cápita es cero.

Partimos de $\dot{k} = sy - (\delta + n)k = sk^{\alpha} - (\delta + n)k$ →**En estado estacionario :** $\boldsymbol{sk^{\alpha} = (\delta + n)k}$→ Por tanto, $\dot{k} = 0$→$\frac{\dot{k}}{k} = 0$

Conocida esta tasa de crecimiento, podemos obtener la tasa de crecimiento del resto de variables:

$$y = k^{\alpha} \rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} = 0, al\ ser\ la\ tasa\ de\ crecimiento\ del\ capital = 0$$

$K = kL$ →Tomamos logaritmos → lnK=lnk+lnL y diferenciamos respecto al tiempo

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{L}}{L} = 0 + n = n$$

$Y = yL$→ Tomamos logaritmos → lnY=lny+lnL y diferenciamos respecto al tiempo

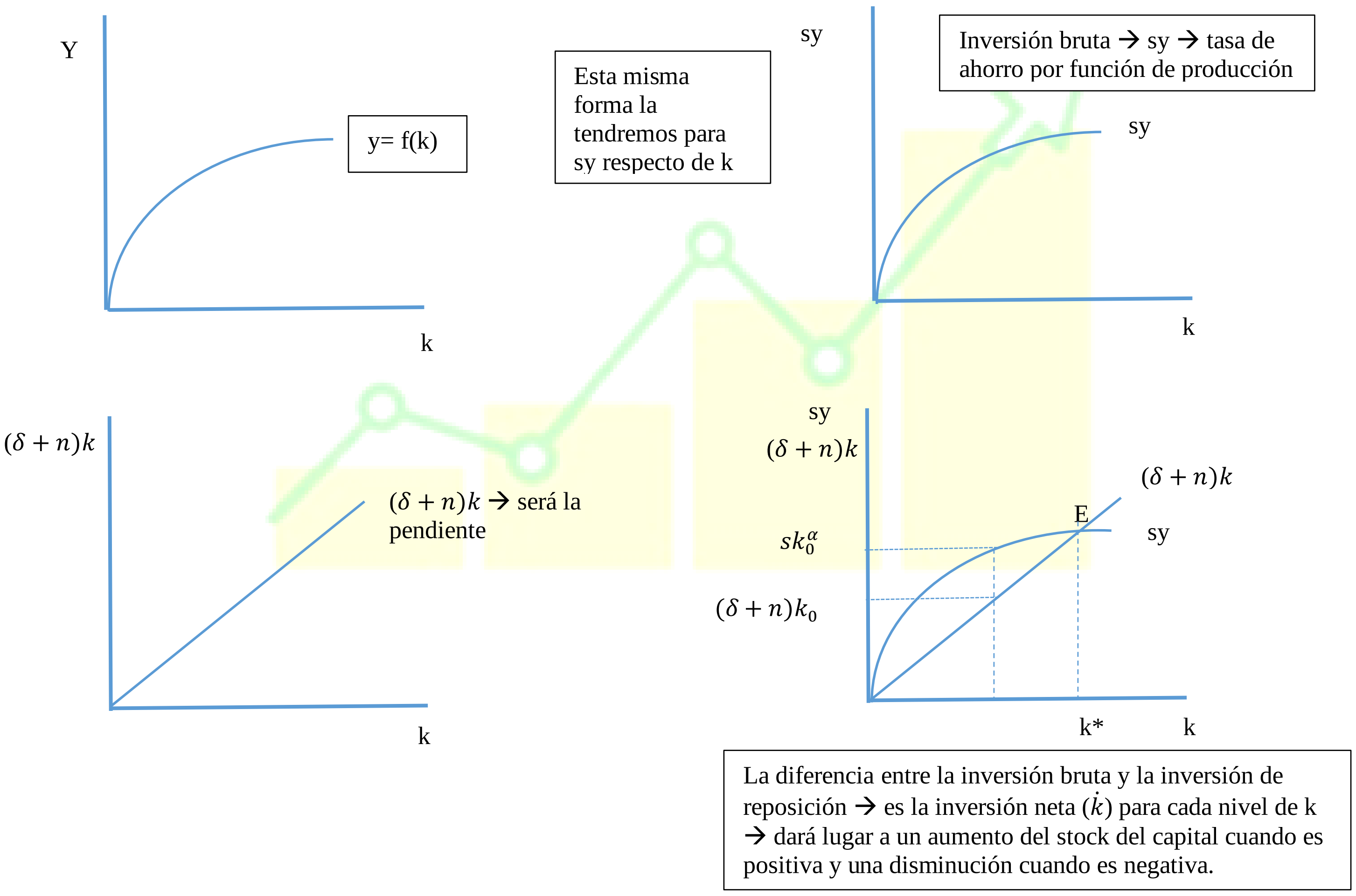
$$\rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{L}}{L} = 0 + n = n$$

Estos mismos cálculos sirven para resolver el **ejercicio 4. Muestre analíticamente cuál es la tasa de crecimiento de las siguientes variables en el estado estacionario: a) Y b) output per capita y c) K d) Capital per capita k e) Y/L**

Vamos a resolver el apartado e), el único que faltaría por obtener:

Operamos de la misma forma→ partimos de $\frac{Y}{L}$ (que no es otra cosa que la productividad media del trabajo → PmeL), y tomamos logaritmos → LnPmeL=LnY –LnL, y diferenciamos respecto del tiempo→ $\frac{Pm\dot{e}L}{PmeL} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = n - n = 0$

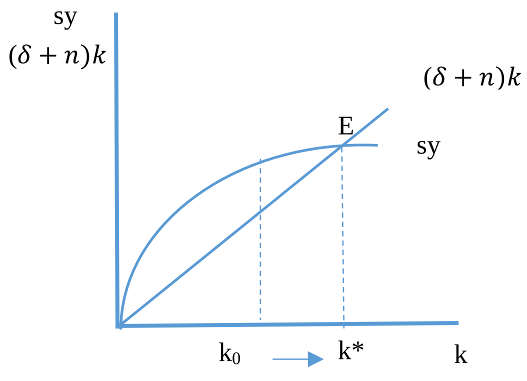
Vamos a analizar gráficamente el comportamiento del modelo a través de lo que se denomina diagrama de fases. En primer lugar, vamos a ver cómo se representa el output en relación al capital → para ello recordemos que el la función de producción es cóncava en k.



¿Qué ocurre cuando la economía no está en equilibrio?

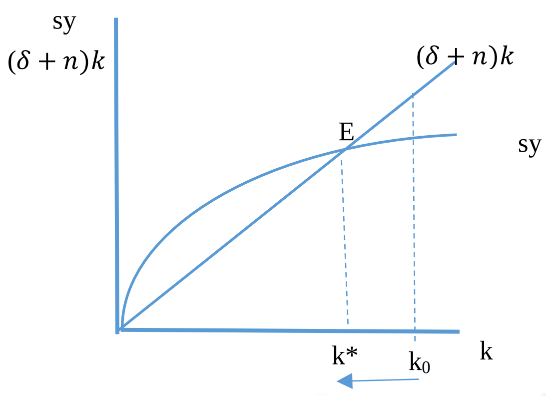
La economía no estará en equilibrio cuando no nos situamos en k*

Caso 1: Nos situamos en $k_0 < k^*$ (este caso daría respuesta al **Ejercicio 6)**



En el momento inicial, se observa como sy > $(\delta + n)k$ → es decir, la inversión bruta > inversión de reposición → inversión neta positiva. El capital crecerá hasta llegar al k* del estado estacionario→ en ese punto la inversión bruta volverá a igualarse a la inversión de reposición→ la inversión neta será 0 y k no crecerá. A esta situación la economía llega gradualmente → la inversión neta cada vez será más pequeña debido a la forma cóncava de la función de producción (consecuencia de PMgK decreciente), al igual que el capital cada vez irá creciendo menos. Fijémonos que como $y = k^{\alpha}$→ si el capital aumenta, la renta per cápita también aumentará

Caso 2. $k_0 > k^*$



En el momento inicial, se observa como sy < $(\delta + n)k$ → es decir, la inversión bruta <inversión de reposición → inversión neta negativa. El capital decrecerá hasta llegar al k* del estado estacionario→ en ese punto la inversión bruta volverá a igualarse a la inversión de reposición→ la inversión neta será 0 y k no crecerá. A esta situación la economía llega gradualmente → la inversión neta negativa cada vez será más pequeña debido a la forma cóncava de la función de producción (consecuencia de PMgK decreciente), al igual que el capital cada vez irá decreciendo menos.
Fijémonos que como $y = k^{\alpha}$→ si el capital disminuye, la renta per cápita también disminuirá

Pregunta Examen. Febrero 2024 Modelo B.

En el Modelo de Solow, para niveles de capital per cápita mayores que el nivel del estado estacionario, necesariamente se produce lo siguiente:

- ***a) La inversión bruta es negativa***
- ***b) La inversión neta es negativa***
- ***c) La inversión neta es cero.***
- ***d) Ninguna de las anteriores***

Como hemos visto en la teoría, cuando nos situamos en niveles de k mayores a k* → sy < $(\delta + n)k$, es decir, la inversión bruta es menor que la inversión de reposición → como inversión neta = inversión bruta – inversión de reposición → la inversión neta será negativa.

Pregunta Examen Febrero 2020.

Una economía se encuentra en un nivel de capital per cápita positivo por debajo del estado estacionario, es decir, se encuentra en k<k*, siendo k* el nivel del estado estacionario. No la altera

ninguna perturbación. Suponiendo que la evolución de la economía se explica por el modelo de Solow, ¿qué ocurrirá a largo plazo?

- ***a) La economía transitará a un equilibrio en el que el nivel de renta per cápita y capital per cápita serán mayores.***
- ***b) La economía transitará a un equilibrio en el que la tasa de crecimiento del PIB será más alta.***
- ***c) La economía no tiene por qué desplazarse de la situación inicial.***
- ***d) Si la productividad marginal del capital es decreciente, la economía transitará a un equilibrio con menor nivel de capital per cápita.***

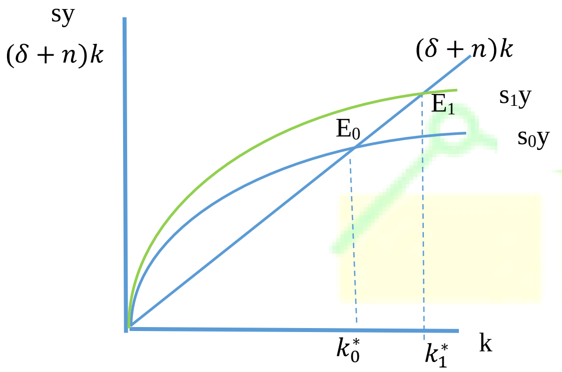
La economía siempre va a buscar estar en el estado estacionario (la opción c) no puede ser correcta). En el estado estacionario, las tasas de crecimiento no cambian (la opción b) no puede ser correcta).

Si estamos en una situación inferior al k, lo que va a pasar es que necesariamente vamos a tener que aumentar el capital per cápita, y al aumentar éste, y siendo que* $y = k^{\alpha}$, la renta per cápita también aumentará.

Cambios en los parámetros del modelo

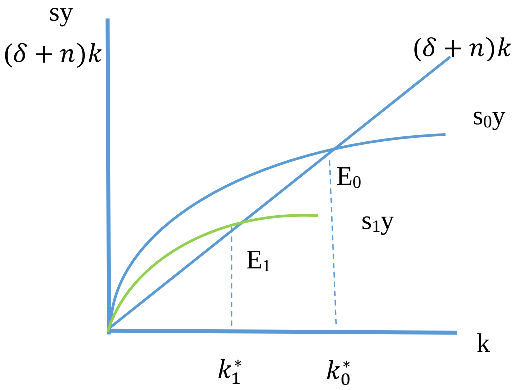
Cualquier cambio en los parámetros supondrá un cambio de efecto nivel (cambia el nivel de renta y capital en el estado estacionario) → NO se alterarán las tasas de crecimiento de la renta per cápita y el capital per cápita → continuarán siendo cero en el estado estacionario (solo serán distintas de cero en el momento de transición del estado estacionario inicial al final).

Caso 1. Aumenta la tasa de ahorro de s_0 a s_1



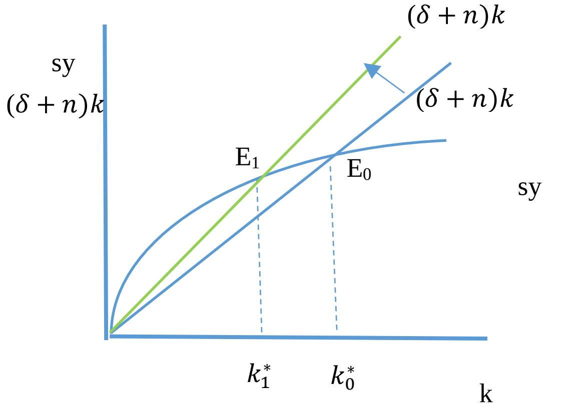
Durante la transición de E_0 a E_1, se pasa a un nivel de capital superior → por tanto, durante ese tiempo, la tasa de crecimiento de la economía será positiva. Una vez nos situamos en el estado estacionario, la tasa de crecimiento de la economía volverá a ser 0.

Caso 2. Disminuye la tasa de ahorro de s_0 a s_1

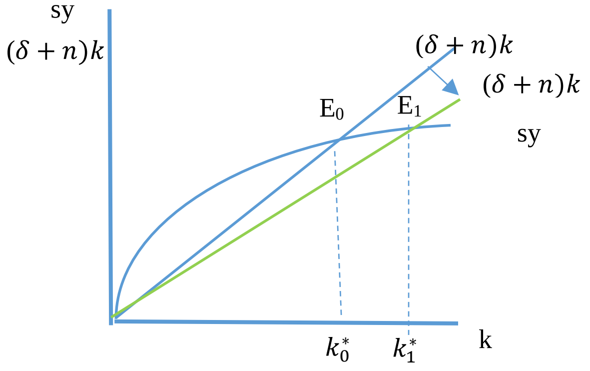


Durante la transición de E_0 a E_1, se pasa a un nivel de capital inferior → por tanto, durante ese tiempo, la tasa de crecimiento de la economía será negativa. Una vez nos situamos en el estado estacionario, la tasa de crecimiento de la economía volverá a ser 0.

Caso 3. Aumenta la tasa de depreciación (δ) o aumenta la población (n→ Ejercicio 5)



Durante la transición de E_0 a E_1, se pasa a un nivel de capital inferior → por tanto, durante ese tiempo, la tasa de crecimiento de la economía será negativa. Una vez nos situamos en el estado estacionario, la tasa de crecimiento de la economía volverá a ser 0.



Durante la transición de E_0 a E_1, se pasa a un nivel de capital superior → por tanto, durante ese tiempo, la tasa de crecimiento de la economía será positiva. Una vez nos situamos en el estado estacionario, la tasa de crecimiento de la economía volverá a ser 0.

4. Modelo de Solow. Implicaciones

El modelo de Solow implica lo siguiente:

1. **La tasa de crecimiento en el estado estacionario es cero al no depender de los parámetros.**

Por el contrario, como hemos adelantado, los niveles de capital y renta per cápita del estado estacionario sí que cambian al depender tanto de la tasa de ahorro, tasa de depreciación y población:

$$\dot{k} = 0 \rightarrow sy^* = (\delta + n)k^* \rightarrow sk^{*\alpha} = (\delta + n)k^* \rightarrow \ k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Como $y = k^\alpha \rightarrow y^* = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Fijémonos que si aumenta la tasa de ahorro, tanto el capital como la renta per cápita aumentarán en el estado estacionario. Sin embargo, si aumenta la tasa de depreciación o la población, tanto el capital como la renta per cápita disminuirán en el nuevo estado estacionario.

Ejercicio 14. Una economía presenta una tasa de ahorro del 20%. La tasa de crecimiento de la población es del 1% anual, y la de depreciación del 5% anual. Alfa es 1/3. Calcule el nivel de output y capital per capita en el estado estacionario y la tasa de crecimiento del capital per cápita.

En cuanto a la tasa de crecimiento, sabemos que NO se ve afectada por los parámetros mencionados en el enunciado, y que SIEMPRE va a ser igual a 0 en el estado estacionario.

Con las fórmulas mencionadas anteriormente del capital y la renta per cápita en el estado estacionario, podemos obtener rápidamente la solución al problema:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^* = \left(\frac{0.20}{0.05 + 0.01}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = 6.08$$

$$y^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{0.20}{0.05 + 0.01}\right)^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = 1.82$$

Preguntas Exámenes

Febrero 2022 Modelo A . El gobierno anuncia que, a partir de ahora los fondos de pensiones no presentarán ninguna ventaja fiscal. En el marco del modelo de Solow, esta medida provoca:

a) Un aumento del nivel de renta del estado estacionario
b) Un descenso del nivel de renta del estado estacionario
c) Un aumento de la tasa de crecimiento de la renta per cápita en el estado estacionario
d) Un descenso de la tasa de crecimiento de la renta per cápita en el estado estacionario.

Las opciones c) y d) no pueden ser correctas ya que sabemos que la tasa de crecimiento de la renta per cápita en el estado estacionario siempre es 0.

Partiendo de $y^* = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$*, y siendo que lo que disminuye es la tasa de ahorro (s), la respuesta correcta será la b).*

Febrero 2020. En el modelo de Solow, un aumento de la tasa de crecimiento de la población

a) Aumenta la tasa de crecimiento de la renta per cápita en el estado estacionario.
b) Reduce la tasa de crecimiento de la renta per cápita en el estado estacionario.
c) Aumenta el nivel de renta per cápita en el estado estacionario.
d) Reduce el nivel de renta per cápita en el estado estacionario

En primer lugar, un cambio en los parámetros del modelo no afecta a las tasas de crecimiento, solo tiene un efecto nivel (variarán la renta y capital per cápita).

Si aumenta la población → aumenta n. Vamos a la fórmula de la renta per cápita en el estado estacionario: $y^* = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$*, → Si aumenta n, la renta per cápita se reducirá → la opción correcta es la d).*

Febrero 2020. El Ministerio de Economía de un país ha manifestado que su departamento va a impulsar el crecimiento a largo plazo del país promoviendo la inversión mediante incentivos fiscales. A la vista de las conclusiones del modelo de Solow, ¿cuáles serán los efectos de las nuevas medidas?

a) Aumentará la tasa de crecimiento del PIB en el estado estacionario, el nivel de renta per cápita en el estado estacionario y el nivel de capital per cápita en el estado estacionario.

b) ***No aumentará la tasa de crecimiento del PIB en el estado estacionario, pero sí el nivel de renta per cápita en el estado estacionario y el nivel de capital per cápita en el estado estacionario.***
c) ***Reducirá la tasa de crecimiento del PIB en el estado estacionario, el nivel de renta per cápita en el estado estacionario y el nivel de capital per cápita en el estado estacionario.***
d) ***No se producirá ningún efecto en las variables en el largo plazo o estado estacionario.***

Como aumenta la inversión → aumenta s. Al aumentar s, recordamos que las tasas de crecimiento no se ven afectadas (a) y c) no pueden ser correctas).

Por otro lado, sí que hay efectos nivel:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Si se produce un aumento de s, observamos que tanto la renta como el capital per cápita aumentarán → la opción correcta es la b)

Febrero 2024. Modelo B. Una economía está en el estado estacionario en el punto A. Se produce un shock que reduce la tasa de crecimiento de la población de la economía. La economía transita a un nuevo estado estacionario en B. De acuerdo con el modelo de Solow sin progreso técnico:

a) ***El nivel de capital per cápita en A es mayor que el nivel de capital per cápita en B.***
b) ***El nivel de capital per cápita en A es menor que el nivel de capital per cápita en B.***
c) ***La tasa de crecimiento del PIB per cápita en A es mayor que la tasa de crecimiento del PIB per cápita en B.***
d) ***La tasa de crecimiento del PIB per cápita en A es menor que la tasa de crecimiento del PIB per cápita en B.***

Si se reduce la tasa de crecimiento de la población → disminuye n. De nuevo, desechamos las opciones que nos proponen que hay un cambio en la tasa de crecimiento (la c) y la d)). Nos fijamos en que las otras dos opciones solo nos hablan del capital y nos centramos en su fórmula:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Si n se reduce → el capital aumentará, es decir, en el punto B, el capital per cápita será mayor que en A → la opción b) es la correcta.

Febrero 2024. Modelo A. Analizamos dos países, M y N, en el marco del modelo de Solow. Ambos se encuentran en el estado estacionario. Los ciudadanos de M son más ahorradores que los de N; el capital se deprecia más rápidamente en N que en M por sus circunstancias climáticas. El crecimiento de la población y el exponente del capital en la función de producción son idénticos en ambos países. Se puede concluir lo siguiente:

a) ***La renta per cápita en M en el estado estacionario es mayor que la renta per cápita en N en el estado estacionario.***
b) ***La renta per cápita en M en el estado estacionario es menor que la renta per cápita en N en el estado estacionario.***
c) ***La tasa de crecimiento del PIB agregado en M en el estado estacionario es mayor que la correspondiente al PIB agregado en N en el estado estacionario.***
d) ***Ninguna de las anteriores.***

En primer lugar, en el país M, la tasa de ahorro (s) es mayor pero la tasa de depreciación (δ) es menor → $s_M > s_N$, mientras que la tasa de depreciación → $\delta_M < \delta_N$.

Partiendo de la fórmula de la renta per cápita:

$$y^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Si nos fijamos en el caso del país M, el numerador es mayor, así como el denominador (la tasa de depreciación es más pequeña) → por tanto la renta per cápita de M va a ser mayor que en N → la opción correcta es la a).

2. **La política económica tiene un papel muy limitado en el crecimiento, transitorio (efecto nivel pero no efecto tasa).**
3. **El modelo predice convergencia: relación inversa entre la tasa de crecimiento y el nivel de renta o de capital durante la transición al estado estacionario.**

En la parte de convergencia, se distingue entre convergencia beta y convergencia sigma

Convergencia beta → relación inversa entre la situación inicial (en términos de renta o capital) y la tasa de crecimiento.

Se distingue a su vez entre:

Convergencia absoluta → implica que los países pobres crecen más deprisa que los ricos → al final todos los países convergen al mismo estado estacionario.

$$crecimiento_i = \propto + \beta renta_{i,0} + \varepsilon_i$$

Si hay convergencia beta absoluta, el parámetro beta debe ser negativo y significativo.

Convergencia condicional → los países convergen a diferentes estados estacionarios. Se analiza convergencia en grupos de países análogos, y se controla dicha convergencia por tros aspectos.

$$Crecimiento\ PIB_{i,t} = \propto + \beta PIB\ inicial_i + X_{i,t} + \varepsilon_i, donde\ X_{i,t}\ son\ las\ variables\ control$$

Si hay convergencia condicional, b debe ser negativo y estadísticamente significativo.

Convergencia sigma → ocurre cuando la dispersión de la renta real entre países o regiones tiende a reducirse en el tiempo. Si hay convergencia sigma, hay convergencia beta (pero NO a la inversa). Sigma se calcularía como la desviación típica de la renta de una muestra de países:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{i,t} - \mu_i\right)^2,\ donde\ y_i\ es\ la\ renta\ y\ \mu\ es\ la\ media\ muestral$$

Gráficamente, habrá convergencia sigma si observamos una reducción de la dispersión de la renta en el tiempo.

Ejercicio 8. A partir de la respuesta a la pregunta anterior ¿puede argumentar por qué se produce la convergencia?

Todo se basa en la productividad marginal del capital. Para niveles de capital muy pequeños, su productividad marginal es muy elevada, siendo lo opuesto para niveles altos de capital. En los puntos intermedios, la productividad marginal del capital se va reduciendo a medida que nos acercamos al estado estacionario→ cuando el nivel de capital es bajo, su tasa de crecimiento (dada por la diferencia entre la productividad marginal del capital y $\delta + n$) es alta (lo opuesto para niveles de capital altos. De esto se llega a que los países con niveles de capital pequeños crecerán a tasas más rápidas, siendo lo opuesto para los países con niveles de capital altos. Si los países comparten características mínimas, en el largo plazo los países pobres llegarían a alcanzar a los países más ricos tanto a nivel de capital como de renta.

Preguntas de Examen

Febrero 2023. Modelo B. Un compañero suyo está elaborando un trabajo de investigación con el fin de analizar si se ha producido en los últimos años convergencia entre las comunidades autónomas en España. Al estimar la siguiente ecuación (en la que se omiten los subíndices de las variables por simplicidad).

Crecimiento PIB per capita = constante + beta1xrenta inicial + beta 2x inversión + beta 3x capital humano + error

Obtiene un valor de beta1 positivo y significativo al 99%.

Una conclusión correcta de la estimación es la siguiente:

- ***a) Hay convergencia condicional en la muestra en el periodo analizado.***
- ***b) No hay convergencia condicional en la muestra en el periodo analizado.***
- ***c) Hay convergencia absoluta en la muestra en el periodo analizado***
- ***d) No hay convergencia absoluta en la muestra en el periodo analizado.***

En primer lugar, para que hubiera convergencia (tanto condicional como absoluta), el beta1 tendría que ser negativo →por tanto ni la opción a) ni la c) son correctas.

Después, nos fijamos que el investigador está utilizando una serie de variables control (inversión y capital), por tanto, está tratando de demostrar si hay convergencia condicional. La respuesta correcta es la b).

Febrero 2020. La predicción de convergencia que se deriva del modelo de Solow es consecuencia de:

a) ***La homogeneidad de grado uno de la función de producción.***
b) ***La productividad marginal decreciente del capital***
c) ***La escasa capacidad de innovar de los países menos desarrollados.***
d) ***El supuesto de que la población crece a una tasa constante.***

La opción correcta sería la b) tal como se ha comentado en el Ejercicio 8.

Febrero 2022. Modelo B

El modelo de Solow es capaz de predecir convergencia entre países porque:

a) ***La productividad marginal del trabajo es decreciente.***
b) ***La productividad marginal del trabajo es creciente.***
c) ***La función de producción es cóncava en los inputs.***
d) ***La función de producción es homogénea de grado 1.***

Como hemos dicho anteriormente, la convergencia de Solow depende del carácter decreciente de la productividad marginal del capital. Cuando decimos que la función de producción es cóncava en los inputs, estamos afirmando que las productividades marginales de ambos inputs son decrecientes → estamos diciendo que se debe a que las productividades marginales de K y L son decrecientes. Como estamos afirmando que depende del decrecimiento de la PmgK → la opción correcta es la c).

5. Modelo de Solow: extensiones y otros modelos lineales

El Modelo de Solow con progreso técnico

El modelo parte de la ecuación: $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}\ con\ 0 < \alpha < 1, donde\ A\ es\ el\ progreso\ técnico$

Se trata de una función de producción con progreso técnico aumentativo del trabajo o neutral en el sentido de Harrod.

El modelo es similar al ya estudiado y vamos a centrarnos en cuáles son las principales diferencias:

- En primer lugar, el progreso técnico crece a la tasa g →$\frac{\dot{A}}{A} = g$
- La ecuación dinámica del capital ahora es: $\dot{k} = sy - (\delta + g + n)k$→ por tanto en el estado estacionario $sy = (\delta + g + n)k$
- En estado estacionario:

$$\dot{k} = 0 \rightarrow sy^* = (\delta + g + n)k^* \rightarrow sk^{*\alpha} = (\delta + g + n)k^* \rightarrow\ k^* = \left(\frac{s}{\delta + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Como $y = k^{\alpha} \rightarrow y^* = \left(\frac{s}{\delta+g+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

- Este modelo trabaja también en unidades de trabajo efectivas, esta vez divididas por AL.
- Se alcanza el estado estacionario
- Las variables en unidades de trabajo efectivo crecen a la tasa "g" en el estado estacionario (los términos per cápita).
- Las variables agregadas ahora crecerán a la tasa de crecimiento: n +g

Convocatoria ordinario 2019. En el modelo de crecimiento neoclásico de Solow-Swan regido por una función de producción con progreso técnico neutral en Harrod, del tipo: : $Y = (AL)^{1-\alpha}K^{\alpha}$, donde A es el coeficiente de progreso técnico que crece a una tasa constante y exógena g, L es el factor de producción trabajo que crece a una tasa constante y exógena n, K es el stock de capital , Y es la producción y alfa es un parámetro entre 1 y 0, si k es la razón capital/trabajo (K/L), en el estado estacionario la tasa de crecimiento de k será:

a) ***dk/k = n + g***
b) ***dk/k=g***
c) ***dk/k=0***
d) ***dk/k= n***

Como ya hemos mencionado, las variables per cápita crecen a una tasa g → respuesta correcta b)

e) Modelo de Ramsey (1928) o modelo neoclásico de crecimiento.

En este modelo los supuestos son que tanto el ahorro como el consumo varían en el tiempo. El problema es complejo y la solución se obtiene a través de un análisis gráfico utilizando el diagrama. La intuición del crecimiento es la misma que en el Modelo de Solow, y es la base de buena parte de modelos contemporáneos (también hay una extensión en el ambiente de incertidumbre).

f) Modelo de Diamond o generaciones solapadas

Al igual que en Ramsey, el ahorro varía en el tiempo, y se sigue manteniendo la misma intuición de crecimiento. Sus aplicaciones son en estudios de seguridad social y transferencias de recursos entre generaciones, así como en modelos con equilibrios múltiples y/o burbujas.

Ejercicio 10. El Ministro de Economía de un país A, en rueda de prensa a los medios, ha manifestado que su departamento va a impulsar el crecimiento a largo plazo del país promoviendo la inversión mediante incentivos fiscales. En el marco del modelo de Solow, ¿es una medida acertada o no?

Si aumenta la inversión→ aumentará s. Hay que recordar que los cambios en los parámetros no tienen un efecto en las tasas (solo tienen un efecto nivel). Por tanto, a largo plazo la economía seguirá creciendo a tasa 0.

Las variables per cápita en estado estacionario, siendo que su definición es:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Aumentarán las dos en estado estacionario. Por tanto, en el proceso transitorio hacia el nuevo estado estacionario, la tasa de crecimiento de ambas variables será positiva. La medida tendrá un impacto positivo en el corto plazo, sin embargo, este efecto desaparecerá en el largo plazo.

Ejercicio 12. La oposición del país A ha respondido al Ministro de Economía diciendo que lo que debería hacer para impulsar el crecimiento (en el marco del modelo de Solow) es aumentar el gasto público. ¿es válida esta recomendación?

Si aumenta el gasto público, esto va a provocar una reducción de la tasa de ahorro. Si disminuye la tasa de ahorro (s), este factor no va a afectar a la tasa de crecimiento de la economía, ya que ésta siempre va a ser 0 en el estado estacionario.

No obstante, recordando la fórmula de la renta per cápita en el estado estacionario:

$$y^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

, se va a producir una reducción de la renta per cápita (lo mismo ocurriría con el capital). Por tanto, hasta que lleguemos al nuevo equilibrio estacionario, tanto la tasa de crecimiento de la renta per cápita como la del capital será negativa (solo de forma temporal).

PREGUNTAS DE EXAMEN

Febrero 2022. Modelo B. En un determinado país el capital per cápita no crece desde hace años. La población está cerciendo al 3%. ¿Cuál es la tasa de variación del capital agregado?

a) **La tasa de variación del capital agregado es .3%**
b) **La tasa de variación del capital agregado es 3%**
c) **La tasa de variación del capital agregado es 0%**
d) **Con los datos proporcionados no es posible saber la tasa de variación del capital agregado**

Considerando que la tasa de crecimiento del capital agregado es: $\frac{\dot{K}}{K} = n$ → el capital agregado va a crecer a un 3% → opción b)

Febrero 2023. Modelo A. En 1962, la desviación típica de la renta per capita provincial en España fue 0.35. En 1997, el indicador se situó en 0.22. Estas cifras sugieren que, entre 1962 y 1997,

a) **Las provincias españolas han experimentado convergencia beta**
b) **Las provincias españolas han experimentado convergencia sigma**
c) **Las provincias españolas no han experimentado convergencia beta**
d) **Las provincias españolas no han experimentado convergencia sigma**

Al estar hablando de desviación típica → hablamos de convergencia sigma (no podrán ser ciertas ni la a) ni la c)). Como ha habido una reducción de la desviación típica en el tiempo, podemos afirmar que ha habido una convergencia sigma → opción b) correcta.

Según el modelo neoclásico de crecimiento de Solow (1956):

a) **La relación capital- trabajo es fija.**

b) **La relación capital-trabajo en el estado estacionario sube, si cae la tasa de crecimiento de la población.**
c) **La relación capital-producto es constante.**
d) **La productividad marginal del capital es creciente.**

La opción d) no puede ser correcta porque ya hemos demostrado en la teoría que la PmgK siempre es decreciente.

Cuando nos hablan de la relación capital-trabajo, nos están hablando de K/L, es decir, del capital per cápita.

Nosotros sabemos que en estado estacionario: $k^* = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

La opción b) nos propone que si disminuye la tasa de crecimiento de la población (n), aumentará el capital per cápita → como vemos estos se cumpliría. La opción correcta es la b).

A largo plazo, según el modelo de crecimiento de Solow, el estado estacionario se caracteriza porque:

a) **Las variables más relevantes crecen a una misma tasa constante**
b) **Las variables per cápita crecen a la misma tasa que la población**
c) **Se hace mínima la tasa de ahorro**
d) **La tasa de crecimiento de la población es nula**

La opción correcta es la a), ya que las per cápita crecen a tasa 0 mientras que las agregadas a la tasa constante de "n".

A largo plazo, en una economía con un proceso de crecimiento neoclásico, un aumento de la tasa de depreciación del capital, provocará que en el estado estacionario:

a) **Aumente el stock de capital por trabajador**
b) **Aumente la relación capital-producto**
c) **Disminuya la tasa de ahorro**
d) **Disminuya la renta per cápita.**

Vamos a empezar analizando los términos per cápita en estado estacionario:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Si en alguno de ellos aumenta la tasa de depreciación → ambos disminuirán. De acuerdo a esto, vemos que la opción d) es correcta.

PRIMERA CONVOCATORIA 2020, 2021. En el modelo de Solow la función de producción:

a) **Es homogénea de grado 1 en trabajo y capital**
b) **Es homogénea de grado mayor que 1 en trabajo y capital**

c) **Es homogénea de grado menor que 1 en trabajo y capital**
d) **Es convexa en el factor capital**

Recordamos que una de las propiedades de la función de producción es que es homogénea de grado 1 tanto en trabajo como capital → la correcta es la a). La d) no podría ser cierta porque la función de producción es cóncava para ambos factores productivos.

PRIMERA CONVOCATORIA 2021. El modelo de Solow puede analizarse empleando las variables en ´términos per cápita porque:

a) **La función de producción es homogénea de grado 1 en trabajo y capital**
b) **La productividad marginal del capital es decreciente**
c) **El capital se deprecia a una tasa constante**
d) **El trabajo crece a una tasa constante.**

La opción correcta es la a). Al ser homogénea de grado 1, esto implica rendimientos constantes a escala, siendo que un cambio en la función de producción en sus inputs, va a ser proporcional para la función de producción → de ahí que podamos dividir para L todos los factores para analizar en términos per cápita.

Primera convocatoria 2021, segunda convocatoria 2020. En el modelo de Solow, la política fiscal:

a) **Puede afectar a la tasa de crecimiento de la economía en el estado estacionario**
b) **Puede afectar a la I+D en el estado estacionario**
c) **Puede afectar a la inversión en infraestructuras en el estado estacionario**
d) **Puede afectar al nivel de capital de la economía en el estado estacionario**

Una política fiscal va a tener efectos de carácter nivel, pero no en las tasas de crecimiento → la opción a) no es correcta. Después, en estado estacionario hemos visto que la única variable de las mencionadas que se evalúa en el Modelo de Solow es el capital → opción correcta la d).

Primera Convocatoria 2021. En el modelo de Solow, el progreso técnico se considera:

a) **Endógeno y positivo**
b) **Endógeno y constante**
c) **Función de los incentivos a la investigación**
d) **Exógeno**

La respuesta correcta es la d), se considera ya dado.

Primera Convocatoria 2021. En el modelo de Solow sin progreso técnico predice que:

a) **La economía crece a una tasa constante y mayor que cero en el estado estacionario.**
b) **El crecimiento en términos per cápita es cero en el estado estacionario**
c) **El comercio genera crecimiento**
d) **El crecimiento en términos per cápita es positivo en el estado estacionario.**

Como hemos visto en la teoría, la opción correcta es la b), tanto el capital como renta per cápita crecen a la tasa 0 en el estado estacionario.

Pregunta Examen. Febrero 2022 Modelo B. Los procesos mundiales de digitalización están acelerando la obsolescencia de parte de la maquinaria e infraestructuras de las empresas del país

A. En la hipótesis ceteris paribus y en el marco del modelo de Solow, ¿qué cabe esperar a largo plazo en el país A?

a) Un aumento de la tasa de crecimiento per capita
b) Una reducción de la tasa de crecimiento per capita
c) Un aumento del nivel de renta per capita
d) Una reducción del nivel de renta per capita

En este caso, sabemos que hay un aumento de la depreciación → las tasas de crecimiento van a ser 0 en el largo plazo (estado estacionario) → a) y b) no pueden ser correctas.

Sin embargo, fijándonos en la fórmula del estado estacionario de la renta per cápita:

$$y^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Se observa claramente como un aumento de la tasa de depreciación, va a reducir la renta per capíta en el estado estacionario → la respuesta correcta es la d).