CAPÍTULO 1. Operaciones algebraicas, matrices y determinantes

1. MATRICES

a. Definición

b. Operaciones

Ejemplo 1.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ calcular:

a. A + B

b. 2A

Ejemplo 1.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ calcular AB

c. Propiedades

d. Matriz traspuesta

Ejemplo 1.3 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ comprobar que se cumplen las propiedades de la traspuesta.

e. Matrices cuadradas relevantes

Ejercicio 1.1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a. Calcule el producto AB

b. Compruebe que $(AB)^T = B^T A^T$

Ejercicio 1.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule $AB,\ BA, B^T C, C^T B, I - C^T C\ y\ (I - CC^T)A$

Ejercicio 1.3 Determine la matrix X tal que AXA=AB si:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1.4 Una matriz es idempotente si $A^2=A$. Razone que $B=I-A$ es también idempotente.

Ejercicio 1.5 Responda:

a. Si una matriz A es de orden 5x3 y el producto AB es de orden 5x7, señale el orden de la matriz B.

c. Indique los valores de k para que AB=BA si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$

2. OPERACIONES Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Ejercicio 1.6 Sea $\mathcal{M}_2$ el conjunto de matrices cuadradas de orden 2. Considerada la operación * definida por $A*B=B^TA^T$. Compruebe si:

a. * es una operación sobre el conjunto de matrices diagonales

b. * es una operación sobre el conjunto de matrices triangulares inferiores

3. PROPIEDADES DE UNA OPERACIÓN

Ejemplo 1.4 Comprobar las diferentes propiedades para la operación:

$$\circ: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(n,m) \to n \circ m = |n-m|$$

Ejercicio 1.7 Sean $\mathbb{N} = \{0,1,2,3 \dots\}$ y la operación $\circ$ definida como:

$$\circ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(n, m) \to n \circ m = 1 + nm$$

Señale si es:

a. Asociativa

b. Conmutativa

c. Tiene elemento neutro para $\circ$

Ejercicio 1.8 Estudie las propiedades de la operación * entre elementos de $\mathbb{Z}$ definida por $a*b = 2ab - b^2 + 1$.

a. Ley de composición externa

b. Estructura algebraica

4. MÉTODOS DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

a. Operaciones y matrices elementales

Ejemplo 1.5 Obtener una matriz triangular superior empleando operaciones elementales sobre la matriz A y calcular la matriz de paso necesaria.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Matriz escalonada. Rango.

Ejemplo 1.6 Calcular el rango de la matriz del ejemplo 1.5

c. Teorema de Gauss-Jordan

Ejemplo 1.7 Obtener la matriz escalonada reducida y la matriz de paso a partir de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.9 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ calcule su matriz escalonada reducida, la matriz de paso como producto de matrices elementales y su rango.

d. Sistemas lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan

Ejemplo 1.8 Resolver:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.9 Resolver:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 1.10 Clasifique y resuelva los siguiente sistemas por el método de eliminación de Gauss.

a. $\begin{cases} 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

5. DETERMINANTES

a. Definición. Cálculo por adjuntos

Ejemplo 1.10 Calcular:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

i. Por adjuntos

ii. Por Sarrus

b. Propiedades

Ejercicio 1.11 Calcular el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Rango mediante el determinante

Ejemplo 1.11 Calcular el rango de

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. MATRICES INVERSAS

a. Teorema de la matriz inversa

Ejemplo 1.12 Calcular la matriz inversa de:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

b. Cálculo mediante operaciones elementales

Ejemplo 1.13 Calcular la matriz inversa de:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1.12 Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} sen\, x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\, x & 0 \\ sen\, x + \cos x & sen\, x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$