CAPÍTULO 1. Operaciones algebraicas, matrices y determinantes

1. MATRICES

a. Definición

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ⇒ m filas, n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{R},\ i \in 1 \ldots m,\ j \in 1 \ldots n$$

Si $m = n$ ⇒ matriz cuadrada

b. Operaciones

SUMA: $A + B = C$ $\quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ → se suman los elementos en la misma posición.

PRODUCTO POR UN ESCALAR: $C = \lambda A$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ ⇒ $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ → se multiplica cada elemento por λ

PRODUCTO DE MATRICES: $AB = C$ $\quad c_{ij} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$

* IMPORTANTE: $\dim A: m \times n$, $\dim B: n \times p$ $\}$ $\dim C = m \times p$

Ejemplo 1.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ calcular:

a. A + B

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

b. 2A

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

info@tuacademiafacil.com

Ejemplo 1.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ calcular AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot(-1) & 1\cdot2+2\cdot4 & 1\cdot3+2\cdot(-2) \\ 0\cdot1+3\cdot(-1) & 0\cdot2+3\cdot4 & 0\cdot3+3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -1 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$2\times2 \quad 2\times3 \Rightarrow 2\times3$$

c. Propiedades

$A+B = B+A$ $\qquad$ $A(B+C) = AB+AC$

$A(BC) = (AB)C$ $\qquad$ $(A+B)C = AC+BC$ $\qquad$ PERO $AB \neq BA$

$A0 = 0$ $\qquad$ $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

d. Matriz traspuesta

A^T — si $A \in M_{n\times m} \Rightarrow A^T \in M_{m\times n}$

$A^T = (a_{ji})$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

PROPIEDADES

$(A^T)^T = A$ $\qquad$ $(A+B)^T = A^T+B^T$ $\qquad$ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ $\qquad$ $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

Ejemplo 1.3 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ comprobar que se cumplen las propiedades de la traspuesta.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

1ª prop $\quad (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$ ✓

2ª prop $\quad (A+B)^T = A^T + B^T$

- $(A+B)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\right)^T \Rightarrow \nexists$ resultado porque son de dist. dim.
- $A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nexists$ resultado porque son de dist. dim.

3ª prop $\quad (\lambda A)^T = \lambda A^T$

- $(\lambda A)^T = \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 0 & 3\lambda \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 2\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}$
- $\lambda A^T = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 2\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}$

✓

4ª prop $\quad (AB)^T = B^T A^T$

- $(AB)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -1 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 12 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$
- $B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 12 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$

✓

e. Matrices cuadradas relevantes

* MATRIZ DIAGONAL $a_{ij}=0$ si $i\neq j$ $\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}$

* MATRIZ SIMÉTRICA $a_{ij}=a_{ji}$ $\Rightarrow A=A^T$ Ej $\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 5\end{pmatrix}$

* MATRIZ IDENTIDAD $\Rightarrow$ matriz diagonal con $a_{ii}=1$ $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

  ↳ $AI=IA=A$

* MATRIZ INVERSA A^{-1} $\Rightarrow A^{-1}A=AA^{-1}=I$
  - matriz REGULAR si $\exists A^{-1}$
  - matriz SINGULAR si $\nexists A^{-1}$

Ejercicio 1.1 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3\end{pmatrix}$

a. Calcule el producto AB

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+2-12+0 & -1+0-8+0 \\ 6+2+3+0 & 3+0+2-9 \\ 12+0-3+0 & 6+0-2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 11 & -4 \\ 9 & 7\end{pmatrix}$$

b. Compruebe que $(AB)^T=B^TA^T$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix} -12 & 11 & 9 \\ -9 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 11 & 9 \\ -9 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

$\Big\}$ $(AB)^T=B^TA^T$ cqd

Ejercicio 1.2 Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}\text{ y }\ C=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}$$

Calcule $AB,\ BA, B^TC, C^TB, I-C^TC\ y\ (I-CC^T)A$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0-2&1+0-1\\2-3+2&2+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&0+3&-1+1\\-1+0&0+0&1+0\\2+2&0+3&-2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&0\\-1&0&1\\4&3&-1\end{pmatrix}$$

$3\times\boxed{2\quad 2}\times 3$

$B^TC \Rightarrow$ NO SE PUEDE $\qquad C^TB\Rightarrow$ NO SE PUEDE

$$C^TC=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow I-C^TC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-2&-3&2\\1&2&0\end{pmatrix}$$

$$CC^T=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=1+4+1=6\Rightarrow (I-CC^T)A=(1-6)A=-5A=-5\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0&5\\-10&-15&-5\end{pmatrix}$$

$\underbrace{1\times\boxed{3\quad 3}\times 1}_{1\times 1}$

Ejercicio 1.3 Determine la matrix X tal que AXA=AB si:

a. $A=\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4&0\\1&2\end{pmatrix}$

Si sabemos calcular A^{-1}: $XAA^{-1}=BA^{-1}\Rightarrow X=BA^{-1}$

$AXA=AB\rightarrow A^{-1}AXA=A^{-1}AB\rightarrow XA=B$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\1&2\end{pmatrix}$$

$2\times\boxed{2\quad 2}\times 2 \qquad 2\times 2$

$$\begin{pmatrix}a+b&4a+3b\\c+d&4c+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\1&2\end{pmatrix}$$

$4=a+b$
$0=4a+3b$
$1=c+d$
$2=4c+3d$

$16=4a+4b$
$0=4a+3b$
$16=b \qquad a=-12$

$4=4c+4d$
$2=4c+3d$
$2=d \qquad c=-1$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-12&16\\-1&2\end{pmatrix}}$$

b. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}$$

$a=0$
$0=0$
$c=2$
$0=3\Rightarrow$ IMPOSIBLE $\qquad \nexists$ SOLUCIÓN

$*\ \nexists A^{-1}\Rightarrow$ no se puede resolver

Ejercicio 1.4 Una matriz es idempotente si $A^2=A$. Razone que B=I-A es también idempotente.

$$B^2=(I-A)^2=(I-A)(I-A)=(I-A)I-(I-A)A=I\cdot I-AI-IA+AA=I-A-A+A^2=I-2A+A=$$

$$=I-A=B \Rightarrow B^2=B \Rightarrow \underline{B \text{ es idempotente}}$$

Ejercicio 1.5 Responda:

a. Si una matriz A es de orden 5x3 y el producto AB es de orden 5x7, señale el orden de la matriz B.

$$A \quad B \quad = \quad C$$

$$5\times\boxed{3 \cdot m}\times n \qquad 5\times 7$$

para poder operar: $3=m$

el resultado $5\times n = 5\times 7 \quad n=7$

$$\boxed{B: 3\times 7}$$

c. Indique los valores de k para que AB=BA si $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 3 & k\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -5\\ 3 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & -10+5k\\ -9 & 15+k\end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 3 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 15\\ 6-3k & 15+k\end{pmatrix}$$

$23=23$

$-10+5k=15 \Rightarrow 5k=25 \Rightarrow \boxed{k=5}$

$-9=6-3k$

$\downarrow$

$-15=-3k$

$k=5$ ✓

$15+k=15+k$ ✓

2. OPERACIONES Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

OPERACIÓN o LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA $\diamond$ en un conjunto M es una aplicación del producto cartesiano $M\times M$:

$$\diamond: M\times M \longrightarrow M$$

$$(a,b) \longrightarrow a\diamond b \in M$$

Ejercicio 1.6 Sea $\mathcal{M}_2$ el conjunto de matrices cuadradas de orden 2. Considerada la operación * definida por $A*B=B^TA^T$. Compruebe si:

a. * es una operación sobre el conjunto de matrices diagonales $=D_1$

$A\in D_1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{pmatrix}$

$B\in D_1 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}b_{11}&0\\0&b_{22}\end{pmatrix}$

$$A*B=B^TA^T=\begin{pmatrix}b_{11}&0\\0&b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}a_{11}+0&0+0\\0+0&0+b_{22}a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&0\\0&a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\in D_1$$

$\boxed{*\text{ es operación sobre } D_1}$

b. * es una operación sobre el conjunto de matrices triangulares inferiores $=D_2$

$A\in D_2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_{11}&0\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

$B\in D_2 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}b_{11}&0\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$

$$A*B=B^TA^T=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{21}\\0&b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\0&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}a_{11}&b_{11}a_{21}+b_{21}a_{22}\\0&b_{22}a_{22}\end{pmatrix}\notin D_2$$

$\boxed{*\text{ no es operación sobre } D_2}$

3. PROPIEDADES DE UNA OPERACIÓN

* CONMUTATIVA: $a\circ b=b\circ a \quad \forall a,b\in M$

* ASOCIATIVA: $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c) \quad \forall a,b,c\in M$

* ELEMENTO NEUTRO e: $a\circ e=e\circ a=a \quad \forall a\in M$

* ELEMENTO INVERSO a': si tiene elemento neutro y $\exists\, a'\circ a=a\circ a'=e$

Ejemplo 1.4 Comprobar las diferentes propiedades para la operación:

$$\circ: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$(n,m)\ \to n\circ m=|n-m|$$

CONMUTATIVA: $n\circ m=|n-m|=|m-n|=m\circ n \Rightarrow$ ES CONMUTATIVA

ASOCIATIVA:
$(a\circ b)\circ c=|a-b|\circ c=\big||a-b|-c\big|$
$a\circ(b\circ c)=a\circ|b-c|=\big|a-|b-c|\big|$
$(a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c) \Rightarrow$ NO ES ASOCIATIVA

$(1\circ 2)\circ 3=\big||1-2|-3\big|=|1-3|=2$
$1\circ(2\circ 3)=\big|1-|2-3|\big|=|1-1|=0$

EL. NEUTRO: $a\circ e=e\circ a=a \to |a-e|=a \to e=0$
$|e-a|=|0-a|=|-a|=a$ ✓ $\quad \boxed{e=0}$

INVERSO: $\exists e \quad a'\circ a=e \Rightarrow |a'-a|=0 \quad a'-a=0 \to a'=a$

Ejercicio 1.7 Sean $\mathbb{N} = \{0,1,2,3 \ldots\}$ y la operación $\circ$ definida como:

$$\circ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(n, m) \to n \circ m = 1 + nm$$

Señale si es:

a. Asociativa

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $\rightsquigarrow (a \circ b) \circ c = (1+ab) \circ c = 1 + (1+ab)c = 1 + c + abc$

$\rightsquigarrow a \circ (b \circ c) = a \circ (1 + bc) = 1 + a(1+bc) = 1 + a + abc$ $\Big\} \neq$ NO ES ASOCIATIVA

b. Conmutativa

$a \circ b = b \circ a$ $\rightsquigarrow a \circ b = 1 + ab = 1 + ba = b \circ a$ $\Rightarrow$ ES CONMUTATIVA

c. Tiene elemento neutro para $\circ$

$a \circ e = a = e \circ a$ $\qquad a \circ e = 1 + ae = a \rightarrow ae = a - 1$ $\quad e = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$ $\Big\{$ $\nexists\ a=0$; diferente para cada a; $\notin \mathbb{N}$

$\nexists$ ELEMENTO NEUTRO

Ejercicio 1.8 Estudie las propiedades de la operación * entre elementos de $\mathbb{Z}$ definida por $a*b = 2ab - b^2 + 1$.

CONMUTATIVA.

$a * b = 2ab - b^2 + 1$

$b * a = 2ba - a^2 + 1$ $\Big\}$ $\cancel{2ab} - b^2 + \cancel{1} = \cancel{2ba} - a^2 + \cancel{1}$

$-b^2 = -a^2$

$b^2 = a^2$ $\qquad$ solo se cumple si $|a| = |b|$

NO ES CONMUTATIVA

ASOCIATIVA. $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$

$a=1 \quad b=2 \quad c=3$ $\qquad (a*b)*c = (1*2)*3 = (2\cdot1\cdot2 - 2^2 + 1)*3 = 1*3 = 2\cdot1\cdot3 - 3^2 + 1 = -2$

$a*(b*c) = 1*(2*3) = 1*(2\cdot2\cdot3 - 3^2 + 1) = 1*4 = 2\cdot1\cdot4 - 4^2 + 1 = -7$ $\Big|$ NO ES ASOCIATIVA

ELEMENTO NEUTRO. $\quad a*e = e*a = a$

$2ae - e^2 + 1 = 2ea - a^2 + 1 = a$

$e^2 = a^2 = a$

solo $a = \pm 1$ $\Rightarrow \nexists$ EL. NEUTRO $\quad \Rightarrow \nexists$ EL. INVERSO

OPERACIONES SOBRE CONJUNTOS

↳ SUMA DE VECTORES $\bar{x}+\bar{y} = (x_1, x_2 \dots x_n) + (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2 \dots x_n+y_n)$

↳ SUMA DE MATRICES $M_{m \times n}$ $A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

a. Ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (\lambda, a) &\longmapsto \lambda a \in M \end{aligned}$$

Ej. $\lambda \bar{x} = \lambda (x_1, x_2 \dots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n)$

b. Estructura algebraica

ESTRUCTURA ALGEBRAICA ⇒ conjunto no vacío que tiene definidas una o más operaciones.

↳ GRUPO : $(M, \diamond)$ y $\diamond$ es asociativa, tiene elemento neutro y elemento inverso

↳ GRUPO CONMUTATIVO o ABELIANO y $\diamond$ es también conmutativa.

4. MÉTODOS DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

a. Operaciones y matrices elementales

→ Intercambio de filas $F_i \leftrightarrow F_j$ $i \neq j$ F_{ij} ≡ permutar las filas i y j de la I

→ Multiplicar fila por escalar $F_i \to \lambda F_i$ $\lambda \neq 0$ $F_i(\lambda)$ ≡ el elemento a_{ii} se sustituye por λ

→ Sumar λ veces una fila a otra $F_i \to F_i + \lambda F_j$ $i \neq j$ $F_{ij}(\lambda)$ ≡ añadir a I el elemento λ en a_{ij}

Ejemplo 1.5 Obtener una matriz triangular superior empleando operaciones elementales sobre la matriz A y calcular la matriz de paso necesaria.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_{31}\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_2}{\sim} \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$F_{32}\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = PA = F_{32}\left(-\tfrac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\tfrac{3}{2}\right) F_{12}\, A =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} A \qquad \boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}$$

b. Matriz escalonada. Rango.

Matriz escalonada → si tiene filas nulas, están al final
→ cada fila comienza con al menos un 0 más que la anterior

Rango A: nº filas no nulas de la escalonada equiv. de A

Ejemplo 1.6 Calcular el rango de la matriz del ejemplo 1.5

$$A \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \text{ filas } \underline{\text{no}} \text{ nulas} \Rightarrow \boxed{\text{Rango}(A) = 2}$$

c. Teorema de Gauss-Jordan

T^{ma} Gauss-Jordan ⇒ toda matriz tiene <u>siempre</u> una $\boxed{\text{única}}$ matriz escalonada reducida equivalente.

* Matriz escalonada reducida:
  - está en forma escalonada
  - los pivotes son 1
  - en cada columna con pivote el resto de elementos son 0.

Ejemplo 1.7 Obtener la matriz escalonada reducida y la matriz de paso a partir de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to \frac{1}{2}F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 \to \frac{1}{7}F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - \frac{1}{2}F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to F_1 + 3F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{red}(A)$$

$$P = F_{12}(-2)\,F_{13}(3)\,F_{23}\left(-\tfrac{1}{2}\right)F_3\left(\tfrac{1}{7}\right)F_{32}(2)\,F_2\left(\tfrac{1}{2}\right)F_{31}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/14 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4/7 \\ 0 & 1 & -1/14 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 & 4/7 \\ 1/14 & 3/7 & -1/14 \\ -1/7 & 1/7 & 1/7 \end{pmatrix} = P}$$

Ejemplo 1.9 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ calcule su matriz escalonada reducida, la matriz de paso como producto de matrices elementales y su rango.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to \frac{1}{2}F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - 4F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to \frac{1}{3}F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 5F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 3F_3}{\sim} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{red}\,A}$$

$$P = F_{43}(-3)\,F_{42}(-5)\,F_3\left(\tfrac{1}{3}\right)F_{32}(-4)\,F_2\left(\tfrac{1}{2}\right)F_{14}$$

$$\boxed{\text{rang}\,A = 3}$$

d. Sistemas lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan

Ejemplo 1.8 Resolver:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{F_2 \to \frac{1}{2}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to \frac{1}{7}F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - \frac{1}{2}F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 \end{array}\right) \overset{F_1 \to F_1 + 3F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -6/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 \end{array}\right) \overset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13/7 \\ 0 & 1 & 0 & -6/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 \end{array}\right)$$

$\text{rang } A = 3$

$\text{rang } A^* = 3$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{13}{7} \\ x_2 &= -\frac{6}{7} \\ x_3 &= -\frac{2}{7} \end{aligned}}$$

Ejemplo 1.9 Resolver:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - 3F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_1 \to F_1 - \frac{1}{2}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang } A = 2 = \text{rang } A^* \Rightarrow$ compatible

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_3 &= \lambda \\ x_2 - \lambda &= 1 \\ x_1 + \lambda &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{x_1 = 1 - \lambda;\ x_2 = 1 + \lambda;\ x_3 = \lambda}$$

Ejercicio 1.10 Clasifique y resuelva los siguiente sistemas por el método de eliminación de Gauss.

a. $\begin{cases} 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{F_1 \to -F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 9 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 9/7 & 9/7 & 5/7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 9/7 & 9/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & -57/7 & -15/7 & -13/7 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to -\frac{7}{57}F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 9/7 & 9/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{19} & \frac{13}{57} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{19} & -\frac{5}{57} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{19} & \frac{13}{57} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{19} & \frac{43}{57} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{19} & \frac{13}{57} \end{array}\right)$$

rang $A = 3 =$ rang $A^* <$ nº incóg.

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_4 = \lambda & x_2 = \frac{8}{19} - \frac{18}{19}\lambda \\ x_3 = \frac{13}{57} - \frac{5}{19}\lambda & x_1 = \frac{43}{57} - \frac{37}{19}\lambda \end{array}}$$

b. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1 \\ F_4 = F_4 - 7F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -15 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

rang $A = 3 \neq 4 =$ rang A $\Rightarrow$ $\boxed{\nexists \text{ SOLUCIÓN}}$

5. DETERMINANTES

a. Definición. Cálculo por adjuntos

$\det: M_n \to \mathbb{R}$

$A \mapsto \det A$

$\} \det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{ij}|$

Ejemplo 1.10 Calcular:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = 4-6 = -2$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

i. Por adjuntos

$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (2-3) - (4-3) = +1-1 = 0$

ii. Por Sarrus

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 = 0-4+3+3-0-2 = 0$

b. Propiedades

$\det A = \det A^t$

$\det AB = \det A \cdot \det B$

* Intercambiamos 2 filas de una matriz entre ellas, el determinante cambia de signo
* Si multiplicamos una fila por λ, el determinante se multiplica por λ
* Si sustituimos una fila por ella misma más otra fila multiplicada por λ, el determinante no varía.
* Si 2 filas o columnas son iguales o múltiplos, el determinante es 0
* Si una fila o columna es 0 o combinación lineal de otras, el determinante es 0

Ejercicio 1.11 Calcular el determinante de:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1&0\\1&1&1&2\\-1&4&1&0\\1&2&2&-1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&2&1&0\\1&1&1&2\\-1&4&1&0\\1&2&2&-1\end{vmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2+2F_4}=\begin{vmatrix}2&2&1&0\\3&5&5&0\\-1&4&1&0\\1&2&2&-1\end{vmatrix}=(-1)^{4+4}\cdot(-1)\begin{vmatrix}2&2&1\\3&5&5\\-1&4&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&10&3\\0&17&8\\-1&4&1\end{vmatrix}=-\left((-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix}10&3\\17&8\end{vmatrix}\right)=$$

a_{44} $\quad$ a_{31}

$$=\begin{vmatrix}10&3\\17&8\end{vmatrix}=80-51=\underline{\underline{29}}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&1&0&3&4\\1&2&2&1&2\\1&1&1&2&1\\1&2&3&0&1\\0&1&1&-1&0\end{pmatrix}\to|B|=\begin{vmatrix}2&1&-1&4&4\\1&2&0&3&2\\1&1&0&3&1\\1&2&1&2&1\\0&1&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{5+2}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}2&-1&4&4\\1&0&3&2\\1&0&3&1\\1&1&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&0&6&5\\1&0&3&2\\1&0&3&1\\1&1&2&1\end{vmatrix}=$$

a_{52} $\quad$ a_{42}

$$=-\left((-1)^{4+2}\cdot1\begin{vmatrix}3&6&5\\1&3&2\\1&3&1\end{vmatrix}\right)=-\begin{vmatrix}3&6&5\\1&3&2\\1&3&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&-3&2\\0&0&1\\1&3&1\end{vmatrix}=-\left((-1)^{3+1}\cdot1\begin{vmatrix}-3&2\\0&1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=-1(-3-0)=\underline{\underline{3}}$$

c. Rango mediante el determinante

Rang (A) = mayor orden para el que podemos encontrar una submatriz cuadrada de A cuyo determinante <u>NO</u> sea nulo

Ejemplo 1.11 Calcular el rango de

a. $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\2&1&1\\3&2&1\end{vmatrix}=0+(-4)+3-(-3+0+2)=-1+1=0$$

$$\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}=0-2=-2\neq0\Rightarrow\boxed{\text{rang } A=2}$$

b. $B=\begin{pmatrix}1&1&0&1&2\\2&2&3&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=2-2=0\qquad\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}=3-0=3\neq0\to\boxed{\text{rang } A=2}$$

6. MATRICES INVERSAS

a. Teorema de la matriz inversa

$$\text{Si } \exists A^{-1} \rightarrow A^{-1} = \frac{(\text{Adj } A)^t}{|A|}$$

$\hookrightarrow A^{-1}$ existe $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Ejemplo 1.12 Calcular la matriz inversa de:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$ $\quad A^{-1} = \frac{(\text{adj } A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} +3 & -1 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 0 - 14 - (0 + (-8) + 24) = 1 - 16 = -15 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -19 & -3 \\ -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj } A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 23 & -6 & -2 \\ -19 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}}{-15} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{23}{15} & \frac{2}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{19}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}$$

b. Cálculo mediante operaciones elementales

$\text{red } A = PA \Rightarrow I = PA \Rightarrow P = A^{-1}$
$\quad \nearrow$ P producto de matrices elementales
$\quad \searrow$ Gauss: $(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$

Ejemplo 1.13 Calcular la matriz inversa de:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\quad$ (I $\mid$ A^{-1})

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - 7F_1}{\overset{F_2 \to F_2 - 4F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + 6F_2}{\overset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2/3 & -5/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2/3 & -5/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) =$$

$$\underset{F_2 \to F_2 - \frac{1}{3}F_3}{\overset{F_1 \to F_1 + \frac{2}{3}F_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -23/15 & 2/5 & 2/15 \\ 0 & 1 & 0 & 19/15 & -1/5 & -1/15 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \qquad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -23/15 & 2/5 & 2/15 \\ 19/15 & -1/5 & -1/15 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 1.12 Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6+0+2-(-6+0+0) = 14$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -6 & 6 & +2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj} A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -6 & 8 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{14} = \boxed{\begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 & 4/7 \\ 1/14 & 3/7 & -1/14 \\ -1/7 & 1/7 & 1/7 \end{pmatrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 8/5 & 3/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 47/5 & 7/5 & 4/5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 7/20 & 1/5 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11/10 & -7/20 & \frac{4}{5} & -7/4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/11 & 1/11 & -7/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7/22 & 3/11 & -9/22 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{22} & \frac{12}{11} & -\frac{47}{22} & \frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & +\frac{7}{22} & -\frac{8}{11} & +\frac{35}{22} & -\frac{10}{11} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3/11 & 1/11 & -7/11 & 4/11 \\ 7/22 & 3/11 & -9/22 & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{22} & \frac{12}{11} & -\frac{47}{22} & \frac{15}{11} \\ +\frac{7}{22} & -\frac{8}{11} & +\frac{35}{22} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

$$C = \begin{pmatrix} sen\,x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\,x & 0 \\ sen\,x + \cos x & sen\,x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} sen\,x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\,x & 0 \\ sen\,x+\cos x & sen\,x-\cos x & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} sen\,x & -\cos x \\ \cos x & sen\,x \end{vmatrix} = sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{Adj } C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} sen\,x & 0 \\ sen\,x-\cos x & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ sen\,x+\cos x & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos x & sen\,x \\ sen\,x+\cos x & sen\,x-\cos x \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ sen\,x-\cos x & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} sen\,x & 0 \\ sen\,x+\cos x & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} sen\,x & -\cos x \\ sen\,x+\cos x & sen\,x-\cos x \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ sen\,x & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} sen\,x & 0 \\ \cos x & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} sen\,x & -\cos x \\ \cos x & sen\,x \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\,x & -\cos x & -1 \\ +\cos x & sen\,x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* $\cos x\,(\operatorname{sen} x-\cos x)-\operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x+\cos x)=\cancel{\cos x\,\operatorname{sen} x}-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-\cancel{\operatorname{sen} x\cos x}=-1$

* $\operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x-\cos x)+\cos x\,(\operatorname{sen} x+\cos x)=\operatorname{sen}^2 x-\cancel{\operatorname{sen} x\cos x}+\cancel{\operatorname{sen} x\cos x}+\cos^2 x=\underline{1}$

$$C^{-1}=\frac{(\operatorname{Adj} C)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}\operatorname{sen} x & \cos x & 0\\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\boxed{\begin{pmatrix}\operatorname{sen} x & \cos x & 0\\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}}$$