Cuestión 1. Utilizando las propiedades del producto y suma matriciales, así como el concepto y propiedades de las matrices inversas, compruebe la veracidad o no de la expresión

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$$

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1} \cdot (A + B) B^{-1}$$

$$A^{-1} + B^{-1} = (A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot B)\, B^{-1}$$

$$A^{-1} + B^{-1} = (I + A^{-1} \cdot B) \cdot B^{-1}$$

$$A^{-1} + B^{-1} = I \cdot B^{-1} + A^{-1} B \cdot B^{-1}$$

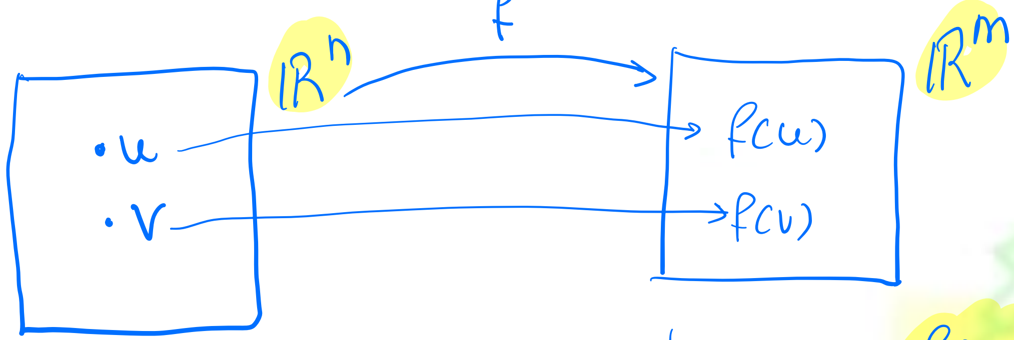
$$A^{-1} + B^{-1} = B^{-1} + \underbrace{A^{-1} \cdot I}$$

$$\underbrace{A^{-1} + B^{-1}} = \underbrace{B^{-1} + A^{-1}}$$

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$$

Cuestión 2. Estudie y compruebe la veracidad o no del siguiente enunciado: «Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores linealmente dependientes de R^n y f es una aplicación lineal de R^n en R^m, entonces $f(\mathbf{u})$ y $f(\mathbf{v})$ son linealmente dependientes.» Justifique su repuesta matemáticamente. Se valora que pueda ilustrar su justificación matemática con algún ejemplo, si procede.

Si u y v vectores dependientes de $\mathbb{R}^n$ y f es una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces $f(u)$ y $f(v)$ son linealmente dependientes.



u y v son l. dependientes.

$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 2x_2)$

Ejemplo

$\mathbb{R}^2$: $u(1,2)$, $v(4,8)$

$\mathbb{R}^3$: $f(1,2) = (3,-1,4)$, $f(4,8) = (12,-4,8)$

$f(\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{2}) = (1+2,\ 1-2,\ 2\cdot 2)$

$f(4,8) = (4+8,\ 4-8,\ 2\cdot 4)$

$v = 4u$
$(4,8) = 4\,(1,2)$

$\rightarrow$ u y v son dependientes si cumple que $\boxed{v = k \cdot u}$

$v = 4u$

$f(u) = (3,-1,4)$
$f(v) = (12,-4,8)$

¿Qué relación observamos entre f(u) y f(v)?

$v = 4u \rightarrow \boxed{f(v) = 4 f(u)}$

$(12,-4,8) = 4\,(3,-1,4)$ //

Resultado importante:

si $v = k u$ entonces $f(v) = k \cdot f(u)$

Volviendo a $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

u y v son L. dep. $\Rightarrow u = k \cdot v$

Como $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal $\Rightarrow f(u) = k f(v)$

$f(u) = f(k \cdot v) = k f(v)$ //

Como $f(u) = k f(v)$ se dice que $f(u)$ y $f(v)$ son L. dependientes.

Cuestión 3 Sea el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ un sistema de generadores de un espacio vectorial V. Sea $w \in V$ y sea el conjunto $S = \{w, v_1, ..., v_m\}$. Estudie bajo qué condiciones (si es que alguna), resulta que S es un sistema de generadores de V y además es linealmente dependiente.

$H = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es un sistema generador de V.

Sea $w \in V$ y sea $S = \{w, v_1, v_2, ..., v_m\}$

Si H es un sistema generador ¿S sist. generador?

Sea $\boxed{H = \{v_1, v_2, ..., v_n\}}$ sistema generador de V

Sea $w \in V$; si al conjunto H le añadimos elementos de V, el conjunto final seguirá siendo un S.G.

$H = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ y $w \in V$

$S = \{w, \underbrace{v_1, v_2, ..., v_m}_{H}\}$ seguirá siendo S.G.

Si a un Sist. Generador le añadimos vectores del Esp. vectorial, el conjunto que se forma seguirá siendo un sist. generador

$$S = \{\overset{\in V}{w}, \overbrace{v_1, v_2, ..., v_m}^{S.G.}\}$$

El nuevo conjunto será un conjunto formado por vect. linealmente dependientes

Justificación

Para que un conj esté formado por vectores L. dependiente, al menos uno de ellos debe ser combinación de los otros.

Sabemos que $w \in V$ y sabemos que $H = \{v_1, \dots, v_m\}$ es un S. Generador de V $\Rightarrow w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

$$S' = \{w, \overbrace{v_1, v_2, \dots, v_m}\}$$

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_n$$

Como w es combinación de $v_1, v_2, \dots, v_m$, diremos que el conjunto S' está formado por vect. l.d.

Ej: → No hace falta!!

$H = \{ \underset{v_1}{(1,0)}, \underset{v_2}{(0,1)} \}$ S. Generador de $\mathbb{R}^2$

y $w = (6,4) \in \mathbb{R}^2$

$S = \{ \boxed{w}, \boxed{v_1, v_2} \}$ → vectores L.d.

$w = (6,4) = 6(1,0) + 4(0,1)$

Cuestión 4 Escriba en forma matricial la forma cuadrática siguiente, y clasifíquela utilizando dos métodos diferentes de clasificación

$$Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$ forma matricial //

Clasificar usando 2 métodos

1er método: Usando criterio de los menores:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$H_1 = 4 > 0$

$H_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - (-3)(-3) = 4 - 9 = -5 < 0$

Si $H_1 > 0$ y $H_2 < 0 \Rightarrow$ la forma cuadrática es indefinida

Criterio:

Si $\left.\begin{matrix} H_1 > 0 \\ H_2 > 0 \end{matrix}\right\}$ definida +

Si $\left.\begin{matrix} H_1 > 0 \\ H_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ semidef. +

Si $\left.\begin{matrix} H_1 < 0 \\ H_2 > 0 \end{matrix}\right\}$ def. −

Si $\left.\begin{matrix} H_1 < 0 \\ H_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ semidef. −

Si no cumple nada de lo anterior (Indef.)

$Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$ //

2º método

si $Q(a,b) = 4a^2 - 6ab + b^2 > 0 \ \forall (a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

Q será def. +

Si $Q(a,b) = 4a^2 - 6ab + b \geq 0 \ \forall (a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$

Q será semidef +

Si $Q(a,b) = 4a^2 - 6ab + b^2 < 0 \ \forall (a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$

Q def -

Si $Q(a,b) = 4a^2 - 6ab + b^2 \leq 0$ ⇓ ||

Q semidef -

Si $Q(a,b) = 4a^2 - 6ab + b^2$ es > 0 para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y es < 0 para otro $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ entonces decimos que es indefinida.

$(a,b) = (5,0)$ $\quad Q(5,0) = 4 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 \cdot 0 + 0^2 = 100 > 0$

$(a,b) = (2,5)$ $\quad Q(2,5) = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot 5 + 5^2$

$Q = 16 - 60 + 25 = -19 < 0$

Q es indefinida

otro método: (valores propios)

$$Q(x,y) = 4x^2 - 6xy + y^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{obtener } A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 9 = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 9$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1(-5)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{45}}{2} > 0 \qquad \lambda_1 = \frac{5+\sqrt{45}}{2} \approx 5'85 > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{45}}{2} < 0 \qquad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{45}}{2} \approx -0'85 < 0$$

Si todos los valores propios son:

a) si son todos + ⇒ def +
b) si son los - ⇒ def -
c) si son + y 0 ⇒ semidef +
d) si son - y 0 ⇒ " -

e) si hay + y - indef.

Problema 1 Dada la siguiente aplicación

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 - 5x_2), \mathbf{x} \in R^2$$

a.- Estudie si es una aplicación lineal

b.- Obtenga la matriz asociada respesto de las bases canónicas

c.- Obtenga la aplicación lineal inversa de $f(x)$, en caso de que exista.

$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 - 5x_2), \mathbf{x} \in R^2$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

a)

a1) $f(0,0) = (0,0)$ //

$f(0,0) = (0 - 2\cdot 0, 3\cdot 0 - 5\cdot 0) = (0,0)$ Sí se cumple.

a2) Sean u y v $\in \mathbb{R}^2$ entonces se ha de cumplir

que $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$u = (x_1, x_2)$ $\quad v = (y_1, y_2)$ $\quad u+v = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$u+v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$f(u+v) = f(\underbrace{x_1+y_1}_{1^a}, \underbrace{x_2+y_2}_{2^a}) = (x_1 + y_1 - 2(x_2+y_2), 3(x_1+y_1) - 5(x_2+y_2))$

$f(u+v) = (x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2, 3x_1 + 3y_1 - 5x_2 - 5y_2)$

$= (x_1 - 2x_1 + y_1 - 2y_2, 3x_1 - 5x_2 + 3y_1 - 5y_2)$

$= (x_1 - 2x_1, 3x_1 - 5x_2) + (y_1 - 2y_2, 3y_1 - 5y_2)$

$= f(u) + f(v)$; $f(u+v) = f(u) + f(v)$ //

$a_3)$ Sea $u \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

entonces $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

$u = (x_1, x_2)$

$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ $\quad f(\lambda u) = f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1 - 2\lambda x_2, 3\lambda x_1 - 5\lambda x_2)$

$= \lambda (\overbrace{x_1 - 2x_2, 3x_1 - 5x_2}) = \lambda f(u)$

$f(\lambda u) = \lambda f(u)$ //

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal

b) matriz asociada a la base canónica

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 - 5x_2)$

$\mathbb{R}^2$ → base canónica $= \{\underset{e_1}{(1,0)}, \underset{e_2}{(0,1)}\}$

$\mathbb{R}^2$ → base canónica $\{(1,0), (0,1)\}$

$f(1,0) = (1 - 2\cdot 0, 3\cdot 1 - 5\cdot 0) = (1-0, 3-0) = (1,3)$

$f(0,1) = (0 - 2\cdot 1, 3\cdot 0 - 5\cdot 1) = (0-2, 0-5) = (-2,-5)$

matriz asociada será

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array}$$

c) aplicación lineal inversa

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2,\ 3x_1 - 5x_2) = (y_1, y_2)$$

$y_1 = x_1 - 2x_2$
$y_2 = 3x_1 - 5x_2$

Se trata de despejar x_1 y x_2

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = y_1 \\ 3x_1 - 5x_2 = y_2 \end{array}\right| \quad (-3) \quad \begin{array}{l} -3x_1 + 6x_2 = -3y_1 \\ 3x_1 - 5x_2 = y_2 \\ \hline \boxed{x_2 = -3y_1 + y_2} \end{array}$$

2ª coord.

$x_2 = -3y_1 + y_2$

$x_1 - 2x_2 = y_1$; $x_1 - 2(-3y_1 + y_2) = y_1$

$x_1 + 6y_1 - 2y_2 = y_1$; $\boxed{x_1 = -5y_1 + 2y_2}$

1ª coord.

$$\boxed{f(y_1, y_2) = (-5y_1 + 2y_2,\ -3y_1 + y_2)}$$

Problema 2 Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

1. Calcule e interprete AB y BA.
2. ¿Qué implicaría que $AB = BA$?

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

1) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} a_1 & b_{12} a_2 \\ b_{21} \cdot a_1 & b_{22} a_2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} \\ a_2 b_{22} & a_2 b_{22} \end{pmatrix}$$ → multiplicar la 1ª fila de B por a_1, y la 2ª fila de B por a_2

$$BA = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} \end{pmatrix}$$ → multipl. 1ª Columna de B por a_1, y la 2ª Columna de B por a_2

b) ¿ $AB = BA$?

$$\begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} \\ a_2 b_{22} & a_2 b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} \end{pmatrix}$$

$a_1 b_{11} = a_1 b_{11}$ sí

$a_1 \cdot \cancel{b_{12}} = a_2 \cdot \cancel{b_{12}} \Rightarrow \boxed{a_1 = a_2}$

para que $AB = BA$ debe pasar que $a_1 = a_2$