EJERCICIOS INTEGRAL DEFINIDA

1. Sea la función $f(x) = ke^{-kx}$, con $k > 0$, determínese el valor de k para que se verifique que

$$\int_0^{+\infty} ke^{-kx}\, dx = 1$$

2. Demostrar que la integral impropia $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$, con $a > 0$, es convergente si $r > 1$ y divergente si es $r \leq 1$.

3. Hallar el carácter de la integral: $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$.

4. Determinar el valor del área del recinto comprendido por la función $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ y el eje de abscisas en el intervalo $[2, +\infty]$.

5. Estudiar la convergencia de la integral: $\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+x} dx$

6. **Examen Enero 2017 1ª Semana**

2. Estudiar el carácter de la integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1}$

7. **Examen Septiembre 2017**

2. Determina si la siguiente integral es convergente o divergente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$$

8. Examen Enero 2022 2ª Semana

Pregunta 1.

Determine el valor del área del recinto comprendido por la función $f\left(x\right) = xA^{-x^2}$ **y el eje de abscisas en el intervalo** $[0, +\infty)$.

1. Sea la función $f(x) = ke^{-kx}$, con $k > 0$, determínese el valor de k para que se verifique que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} ke^{-kx}\, dx = 1} \quad \checkmark$$

$$\int_0^{\infty} ke^{-kx}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b ke^{-kx}\, dx =$$

$$= \left\{ \left[-\int -ke^{-kx}\, dx = -e^{-kx} + C_1 \right] \right. = \lim_{b \to \infty} \left[-e^{-kx} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\left(-e^{-kb} \right) - \left(\underbrace{-e^{-k \cdot 0}}_{-1} \right) \right) =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\underbrace{-e^{-kb}}_{-\frac{1}{e^{kb}} = -\frac{1}{e^{\infty}} = 0} + 1 \right) = 1 //$$

2. Demostrar que la integral impropia $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx$, con $a > 0$, es convergente si $r > 1$ y divergente si es $r \leq 1$.

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^r} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{x^r} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-r} dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-r+1}}{-r+1} \right]_a^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b^{-r+1}}{-r+1} - \frac{a^{-r+1}}{-r+1} \right]$$

- $r > 1 \longrightarrow -r+1 < 0$ $\quad \left[0 - \frac{a^{-r+1}}{-r+1} \right] = -\frac{a^{-r+1}}{-r+1} \rightarrow$ CONVERGENTE
- $r < 1 \longrightarrow -r+1 > 0$ $\quad \left[\infty - \frac{a^{-r+1}}{-r+1} \right] = \infty \rightarrow$ DIVERGENTE
- $r = 1$ $\quad \int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln|x| \right]_a^b =$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln|b| - \ln|a| \right) = \infty \rightarrow \text{DIVERGENTE}$$

3. Hallar el carácter de la integral: $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^r}dx \qquad r = 1/2 \rightarrow \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$r < 1 \rightarrow \text{CONVERGENTE}$$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &f(x) < g(x) \\ &\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx \rightarrow \text{CONVERGENTE}$$

4. Determinar el valor del área del recinto comprendido por la función

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ y el eje de abscisas en el intervalo $[2, +\infty]$.

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \overset{*}{=}$$

$$= \begin{cases} u = \ln x \quad // \quad u^2 = (\ln x)^2 \\ du = \frac{1}{x}\,dx \to dx = x\,du \end{cases} \Bigg| \int \frac{1}{\cancel{x}\cdot u^2}\,\cancel{x}\,du =$$

$$= \int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C' = \frac{u^{-1}}{-1} + C' = -\frac{1}{u} + C'$$

$$\overset{*}{=} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln b} - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \boxed{\frac{1}{\ln 2}}$$

$$-\frac{1}{\ln b} \Rightarrow -\frac{1}{\ln \infty}$$

$$-\frac{1}{\infty} = 0$$

5. Estudiar la convergencia de la integral: $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+x}\,dx}$ → CONVERGENTE

1a especie

$$\int_1^{\infty} \frac{x+3}{x^3+x}\,dx = \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+x}\,dx}_{1} + 3\underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+x}\,dx}_{2} = *$$

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$$

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ $r>1$ → CONVERGENTE
2. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ $r>1$ → CONVERGENTE

$$= \int_1^{\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2+1)}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{\underbrace{x^2+1}_{f_1(x)}}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\underbrace{x^3+1}_{f_2(x)}}\,dx$$

$f_1(x)$ * CONVERGENTE

$f_2(x)$ * CONVERGENTE

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ g_1(x) &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2} \quad *$$

$$\left.\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{x^3+1} \\ g_2(x) &= \frac{1}{x^3} \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{x^3+1} < \frac{1}{x^3} \quad *$$

6. **Examen Enero 2017 1ª Semana**

2. Estudiar el carácter de la integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1}$

$$\int_a^{\infty} e^{tx}\,dx \rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \rightarrow \int_a^{\infty} e^{-x}\,dx$$

$t<0$ CONVERGENTE

$t=-1$ CONVERGENTE

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{e^x+1} \\ g(x) = \dfrac{1}{e^x} \end{array}\right\} \quad f(x) < g(x)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x}\,dx \rightarrow \text{CONVERGENTE} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx \text{ es CONVERGENTE}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \frac{1}{e^x+1}\,dx = -\int_0^{\infty} \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\int_0^{\infty} \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx =$$

$$e^{-x}(e^x+1) = e^0 + e^{-x} = 1 + e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\int_0^b \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\ln|1+e^{-x}|\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\left(-\ln|1+e^{-b}|\right) - \left(-\ln|\underbrace{1+e^{0}}_{2}|\right) \right) = \ln 2 \rightarrow \text{CONVERGENTE}$$

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

ADEFACIL

7. Examen Septiembre 2017

2. Determina si la siguiente integral es convergente o divergente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 x e^{-x^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx =$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2}\int -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \right\} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\underbrace{-\frac{1}{2} e^{0}}_{-1/2} - \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2}\right)\right] + \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-b^2} - \underbrace{\left(-\frac{1}{2} e^{0}\right)}_{-1/2}\right] =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{e^{a^2}}}_{0}\right) + \lim_{b\to\infty} \left[-\underbrace{\frac{1}{2\, e^{b^2}}}_{0} + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow \text{CONVERGENTE}$$

8. **Examen Enero 2022 2ª Semana**

Pregunta 1.

Determine el valor del área del recinto comprendido por la función $f\left(x\right)=xA^{-x^2}$ **y el eje de abscisas en el intervalo** $[0,+\infty)$.

$$\int_0^{\infty} x A^{-x^2} dx = \boxed{\int_0^{\infty} x \cdot 3^{-x^2} dx =}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{2}\int_0^b -2x\cdot 3^{-x^2} dx\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{3^{-x^2}}{\ln 3}\right]_0^b =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c' \\ \boxed{\int f'(x) a^{f(x)} dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + c'} \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{3^{-b^2}}{\ln 3} - \left(-\frac{1}{2}\frac{\overbrace{3^0}^{1}}{\ln 3}\right)\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\cancel{\frac{1}{2\ln 3\cdot 3^{b^2}}}_{0} + \frac{1}{2\ln 3}\right) = \boxed{\frac{1}{2\ln 3}}$$

$$\frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} x A^{-x^2} dx = \frac{1}{2\ln A}}$$