EJERCICIOS INTEGRAL DEFINIDA

1. Calcúlese el área S comprendida entre la función $y = e^x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

$$A = \int_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e = e(e-1)$$

2. Hállese el área del recinto del primer cuadrante limitado por el eje de las x, la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x + y - 6 = 0$.

Solución:

$$A = \int_0^2 2\sqrt{2x}\ dx + \int_2^6 (6-x)dx = \left[\frac{2}{3}(2x)^{3/2}\right]_0^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_2^6 = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3}$$

3. Determínese el área de la región limitada por las funciones:

$$y = x^2 - 4x + 8 \qquad e \quad y = 2x \qquad \text{para} \quad 0 \le x \le 3$$

Solución:

$$A = \int_0^2 [(x^2 - 4x + 8) - (2x)]dx + \int_2^{\overset{4}{\cancel{3}}} [2x - (x^2 - 4x + 8)]dx = 7\overset{8}{\cancel{,3}}3$$

4. Calcule el área comprendida entre la curva $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$.

Solución:

$$A = \int_0^4 x\,dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

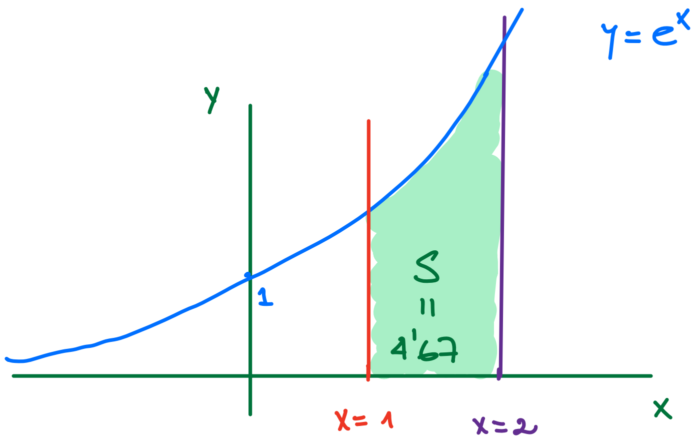
5. **Examen Enero 2007 2ª Semana**

3. Hallar el área de la figura comprendida entre las siguientes curvas: $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$.

6. **Examen Enero 2010 1ª Semana**

3. Calcule el área limitada por la curva $y = x^2 - 2x - 3$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$, $x = 4$

1. Calcúlese el área S comprendida entre la función $y = e^x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.



$$y = e^x \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 1 \\ x \rightarrow \infty \rightarrow y \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -\infty \rightarrow y = \dfrac{1}{e^{-x}} = 0 \end{cases}$$

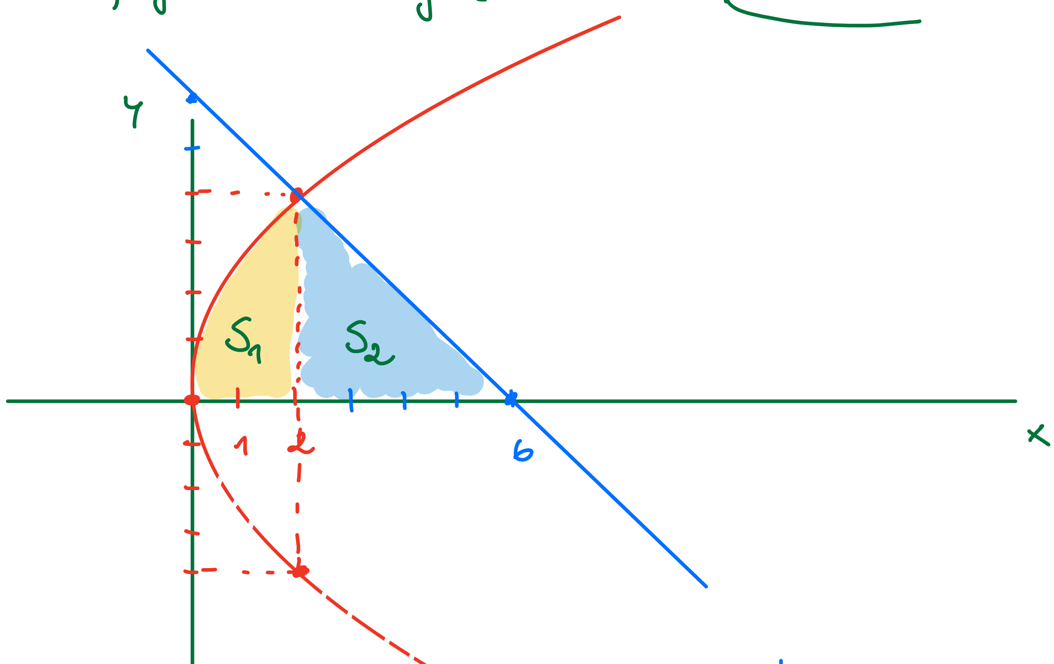
$$\boxed{S} = \int_1^2 e^x\,dx = e^x\Big]_1^2 = e^2 - e^1 = e^2 - e = \boxed{e(e-1)} =$$

$$= 2'7182\,(2'7182 - 1) = 4'67$$

2. Hállese el área del recinto del primer cuadrante limitado por el eje de las x, la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x + y - 6 = 0$.

1) $x + y - 6 = 0 \longrightarrow y = -x + 6$

2) $y^2 = 8x \longrightarrow y = \pm\sqrt{8x}$



$$y = \pm\sqrt{8x} \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = \pm 4 \end{cases}$$

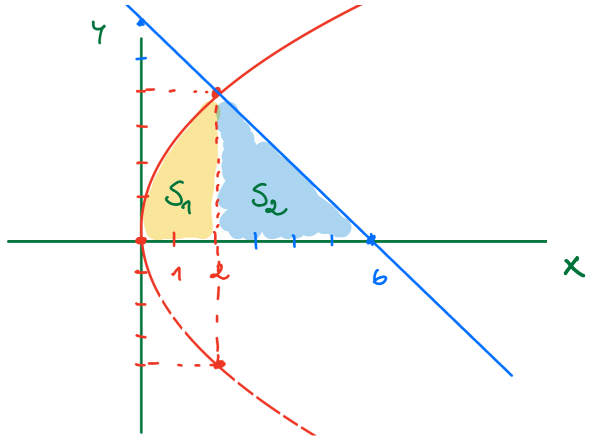
$y = -x + 6$

$x = 0 \rightarrow y = 6$

$y = 0 \rightarrow x = 6$

$$\left(\sqrt{8x}\right)^2 = (-x+6)^2 \longrightarrow 8x = x^2 + 36 - 12x$$

$$x^2 - 20x + 36 \begin{cases} \cancel{x = 18} \\ x = 2 \end{cases}$$



$$A = S_1 + S_2 =$$

$$= \int_0^2 \sqrt{8x}\;dx + \int_2^6 (-x+6)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 8(8x)^{1/2}dx + \int_2^6 -x\,dx + \int_2^6 6\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\underbrace{\frac{(8x)^{1/2+1}}{1/2+1}}\Bigg]_0^2 + \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg]_2^6 + 6x\Bigg]_2^6 =$$

$$\frac{(8x)^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}(8x)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}_{4}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\Big[\underbrace{(8\cdot 2)^{3/2}}_{(16)^{3/2}} - (8\cdot 0)^{3/2}\Big] + \left[-\frac{6^2}{2} - \left(-\frac{2^2}{2}\right)\right] + \left[6\cdot 6 - 6\cdot 2\right] =$$

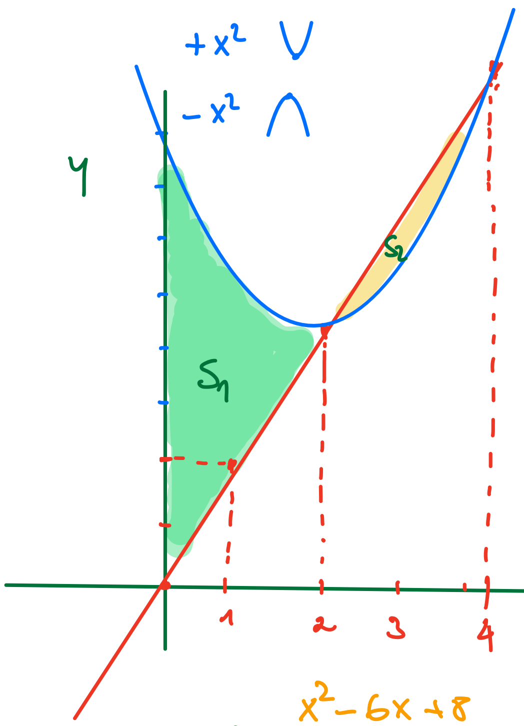
$$= \frac{1}{12}\sqrt{16^3} + \left(-\frac{36}{2}\right) + \frac{4}{2} + 36 - 12 =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot 64 - 18 + \frac{4}{2} + 36 - 12 = \frac{16}{3} + 6 + \frac{4}{2} = \frac{32+36+12}{6} =$$

$$= \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$$

3. Determínese el área de la región limitada por las funciones:

$$y = x^2 - 4x + 8 \qquad e \qquad y = 2x \qquad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 3$$



$x=0 \rightarrow y=0$

$x=1 \rightarrow y=2$

$y = x^2 - 4x + 8$

$x=0 \longrightarrow y=8$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2-4x+8 \\ y = 2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2-4x+8 = 2x \\ x^2-6x+8=0 \end{array} \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

$$A = S_1 + S_2 = \int_0^2 \overbrace{(x^2-4x+8-2x)}^{x^2-6x+8}\,dx + \int_2^4 \overbrace{(2x-(x^2-4x+8))}^{-x^2+6x-8}\,dx =$$

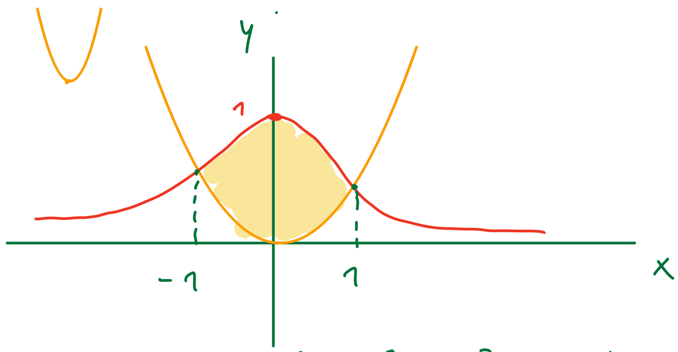
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{6}^{\,3}x^2}{\cancel{2}} + 8x\Big]_0^2 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{6}^{\,3}x^2}{\cancel{2}} - 8x\right)\Big]_2^4 =$$

$$= \frac{2^3}{3} - \overbrace{3\cdot2^2}^{12} + \overbrace{8\cdot2}^{16} + \left(-\frac{4^3}{3} + \overbrace{3\cdot4^2}^{48} - \overbrace{8\cdot4}^{32}\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \overbrace{3\cdot2^2}^{12} - \overbrace{8\cdot2}^{16}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 4 - \frac{64}{3} + 16 + \frac{8}{3} + 4 = \frac{-48}{3} + 24 = \frac{-48+72}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

5. **Examen Enero 2007 2ª Semana**

3. Hallar el área de la figura comprendida entre las siguientes curvas: $\underbrace{y=\dfrac{1}{1+x^2}}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$.



$x=0 \rightarrow y=1$

$|x| \rightarrow \infty \rightarrow y \rightarrow 0$

Puntos corte

$$\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{2} \\ y=\dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right\} \quad \frac{x^2}{2}=\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow x^2+x^4=2$$

$$x^4+x^2-2=0 \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{A}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\operatorname{arctg}(x)\Big]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1}=$$

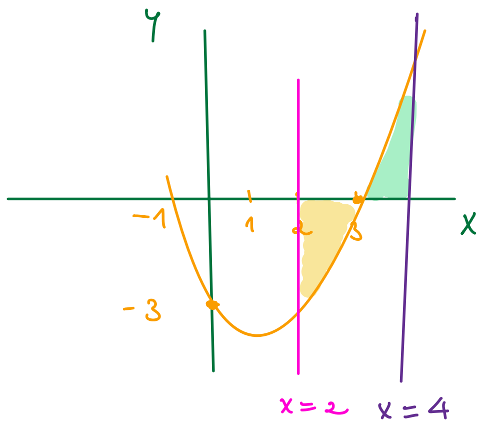
$$=\operatorname{arctg}(x)\Big]_{-1}^{1}-\frac{x^3}{6}\Big]_{-1}^{1}=\left(\operatorname{arctg}(1)-\operatorname{arctg}(-1)\right)-$$

$$-\left(\frac{1^3}{6}-\frac{(-1)^3}{6}\right)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2\pi}{4}-\frac{2}{6}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{3\pi-2}{6}}$$

6. Examen Enero 2010 1ª Semana

3. Calcule el área limitada por la curva $y = x^2 - 2x - 3$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$, $x = 4$



$x = 0 \rightarrow y = -3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

$$\int_2^3 -(x^2 - 2x - 3)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 3)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 3x\right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 3x\right]_3^4 =$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\cdot 3\right)}_{9} - \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 + 3\cdot 2\right) + \left(\frac{4^3}{3} - 4^2 - 3\cdot 4\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3\cdot 3\right) =$$

$$= 9 - \frac{22}{3} + \left(-\frac{20}{3}\right) - (-9) =$$

$$= 9 - \frac{22}{3} - \frac{20}{3} + 9 = 18 - \frac{42}{3} = 4$$