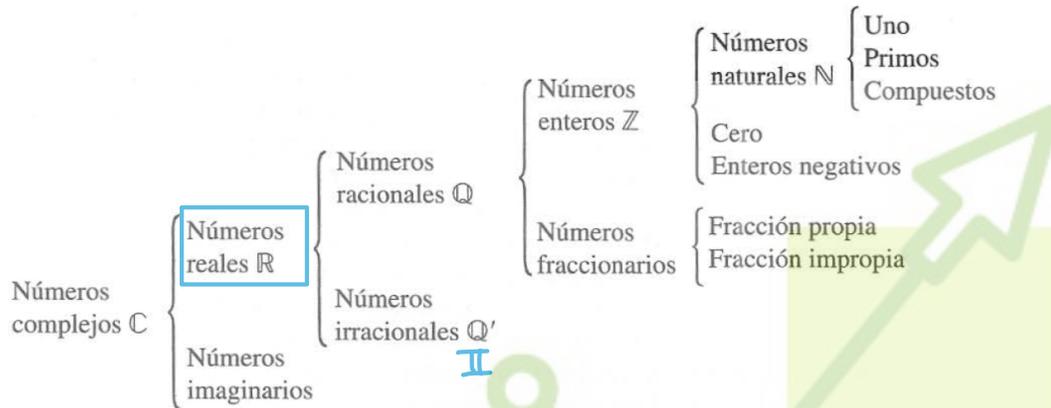




## T0. INTRODUCCIÓN

### ► CLASES DE NÚMEROS



$\mathbb{N}$  = **Números naturales** (de *natural*): Los utilizamos para contar.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

$\mathbb{Z}$  = **Números enteros** (de *Zahlen*): Sirven para contar en «direcciones opuestas» a partir de un nuevo número: el «cero 0».

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$\mathbb{Q}$  = **Números racionales** (de *quotient*): Son los que resultan de dividir un número entero  $m$  por otro  $n$ , es decir,  $m/n$ .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots, -\frac{13}{2}, -\frac{10}{3}, -\frac{7}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \dots \right\}.$$

$\mathbb{I}$  = **Números irracionales** (de *irrational*): Tienen infinitas cifras decimales y éstas no siguen ningún patrón. Por ejemplo:

$$\pi = 3, 141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279 \dots \text{«número pi»}$$

$$e = 2, 718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352 \dots \text{«número e»}$$

$$\sqrt{2} = 1, 414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209 \dots$$

$\mathbb{R}$  = **Números reales** (de *real*): Son el conjunto formado por los números racionales y los irracionales, y completan todos los huecos de la recta real:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$





## ▶ EL ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Existe una **relación de orden**  $<$  (que se lee «menor que») tal que dados dos números reales  $x$  e  $y$  (distintos), se cumple

$$x < y \quad \text{ó} \quad y < x.$$

$$x > 2 \\ 2 < x$$

**Signo de un número  $x$ :** **positivo** si  $0 < x$ ; **negativo** si  $x < 0$ .

El orden en  $\mathbb{N}$ :

$$1 < 2 < 3 < 4 < \dots < 200 < \dots < 10^6 < \dots$$

El orden en  $\mathbb{Z}$ :

$$\dots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \dots$$

El orden en  $\mathbb{R}$ :

Dos números reales se ordenan comparando su expresión decimal.

## ▶ OTRAS RELACIONES DE ORDEN

**$>$**  («mayor que»)

$$x > y \quad \text{si se cumple que} \quad y < x.$$

$$x < 2 \\ x > 3$$

**$\leq$**  («menor o igual que»)

$$x \leq y \quad \text{si se cumple que} \quad \begin{cases} x = y \\ \text{ó} \\ x < y \end{cases}$$

$$x < 2 \\ x \leq 2$$

**$\geq$**  («mayor o igual que»)

$$x \geq y \quad \text{si se cumple que} \quad \begin{cases} x = y \\ \text{ó} \\ x > y \end{cases}$$

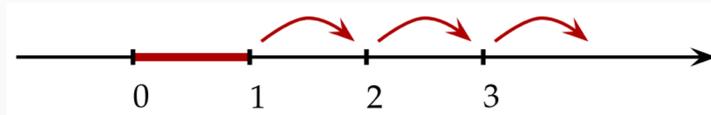
$$x > 3 \\ x \geq 3$$



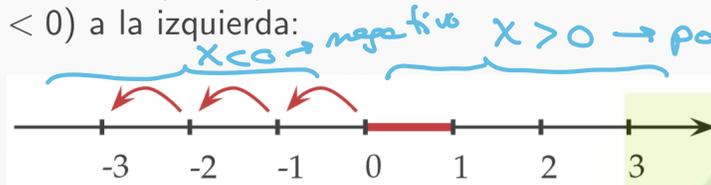


## ▶ LA RECTA REAL

Los números reales se representan en una recta, en la cual se fija un punto 0, llamado **origen**, una **unidad** de longitud y un **sentido** positivo:



Los números positivos ( $x > 0$ ) se colocan a la derecha del origen, y los negativos ( $x < 0$ ) a la izquierda:

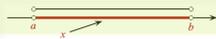


**Resultado muy importante:** A cada número real le corresponde un único punto en la recta y viceversa. La recta se denomina **recta real** y es una representación geométrica de  $\mathbb{R}$ .

## ▶ SUBCONJUNTOS ESPECIALES

### INTERVALOS FINITOS

abiertos:  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$



cerrados:  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$



semiabiertos (o semicerrados):

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$



$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$



*(a, a no esté incluido*  
*[a, a si está inclui*

### INTERVALOS INFINITOS

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$





## ▶ OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

### • LA POTENCIA

Si  $n$  es un número natural, se define la potencia  $n$ -ésima de  $x \in \mathbb{R}$  como

$$x^n = x \cdot \overset{(n)}{\dots} \cdot x = \underbrace{x^1 \cdot x^1 \cdot x^1 \dots x^1}_n = x^n$$

**Propiedades:**

- $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ ,  $\rightarrow (x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$

- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ ,  $\rightarrow x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

- $(xy)^n = x^n y^n$ ,  $\rightarrow (x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$

- pero  $(x+y)^n \neq x^n + y^n$

- $x^0 = 1$  y  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ .  
 $\left. \begin{array}{l} 2^0 = 1 \\ x^{-3} = \frac{1}{x^3} \end{array} \right\}$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= \\ &= (x+y)(x+y) = \\ &= x^2 + y^2 + 2xy \end{aligned}$$

### • LA RAÍZ

Si  $n$  es un número natural, se define la raíz  $n$ -ésima de  $x$  como

$$\sqrt[n]{x} = y \text{ siempre que } y^n = x.$$

**Propiedades:**

- Si  $n$  es par, entonces debe ser  $x \geq 0$ .

- Potencias racionales:  $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ .  $\rightarrow \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})^m &= x^{\frac{m}{n}} \\ x &= y^n \\ (\sqrt{x})^2 &= 3^2 \\ x &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$





## • EL VALOR ABSOLUTO

Se define el **valor absoluto** de un número  $x$  como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades básicas del valor absoluto:

1  $|x| = 0 \iff x = 0.$

2  $\sqrt{x^2} = |x|.$

3  $|x| = |-x|.$

4  $|xy| = |x||y|.$

$| -3 \cdot 5 | = | -3 | \cdot | 5 |$

15

$\frac{3 \cdot 5}{15}$

5  $|x^n| = |x|^n.$

6  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$

7  $|x + y| \leq |x| + |y|.$

8  $|x - y| \geq |x| - |y|.$

$| -5 + 2 | = | -3 | = 3 < | -5 | + | 2 | = 7$   
5 + 2

$| -3 | = 3$

$| 3 | = 3$

$| 5 - 7 | = | -2 | = 2$

$| -7 | + 3 = 7 + 3 = 10$

$|x| = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$\sqrt{3^2} = |3| < \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$





## DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos (formados por números o no). Una **función**

$$f : A \longrightarrow B$$

es una «regla» que a cada elemento  $a \in A$  le asigna un **único** elemento  $b \in B$  (su **imagen**). Esto se suele escribir como

$$f(a) = b$$

$$f(x) = y$$

$$f : A \longrightarrow B, \quad f(a) = b$$

- El conjunto  $A$  en el cual está definida la función se denomina **dominio** de la función, y se denota por  $\text{dom}(f)$ .
- $a =$  **variable independiente** (es **variable** porque puede tomar cualquier valor en  $A$  y es **independiente** porque su valor no depende de nada externo)
- $b =$  **variable dependiente** (es **variable** porque en principio puede tomar cualquier valor dentro de  $B$  y es **dependiente** porque su valor concreto está «en función» de  $a$ ).
- Dependiendo de los valores que toma la función (es decir, de cómo sea  $B$ ), se distinguen entre funciones (llamadas, a veces, variables) **cuantitativas** (peso, altura, edad...) y **cualitativas** (color, sexo...).

