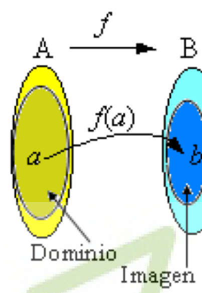
T1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1. FUNCIÓN DE UNA VARIABLE



Dados dos conjuntos **A** y **B**, <u>una función de **A** en **B**</u> es una relación (una ley) que asigna a cada elemento de **A** uno y sólo un elemento de **B.**
La notación *f*: **A** → **B** indica que *f* es una función de **A** en **B**; mientras que $f(a) = b$ indica que al elemento *a* de **A** se le asocia el elemento *b* del conjunto **B**. También se dice que *b* es la imagen de *a*. El elemento *a* y su imagen *b* determinan el par (*a*, *b*). Para cada *a*, su imagen *b* debe ser única.
Con esto, puede decirse que: "Una función *f* entre dos conjuntos **A** y **B** es un conjunto de pares ordenados (*a*, *b*), de manera que no hay dos pares con el mismo primer elemento".
Así, por ejemplo, los pares (2, 1) y (2, 3) no pueden pertenecer a la misma función, pues eso indicaría que al número 2 le corresponden dos números, el 1 y el 3, en contra de que la correspondencia debe ser única.

<u>Dominio de *f*</u>, Dom(*f*). Es el conjunto de los elementos de **A** que intervienen en la relación.
<u>Imagen</u> o recorrido de una función *f*, Im(*f*), es el conjunto de valores que toma $f(a)$ cuando *a* pertenece al dominio.
Si la función viene dada por el conjunto de pares (a_i, b_i), su dominio está formado por los elementos a_i, mientras que su imagen son los elementos b_i.

1.1 FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

<u>Función real de variable real</u>. Es una función que asocia a cada número real otro número real. Se indica así: *f*: **R** → **R**.
Si el par (*x, y*) pertenece a la función *f*, significa que $f(x) = y$. Así pues, el domino lo forman los números *x* para los cuales existe el valor de $f(x)$. La imagen, el conjunto de valores que toma $f(x)$ cuando *x* pertenece al dominio; es, por tanto, el conjunto de resultados.
A *x* se la llama variable independiente. Cuando se representa se hace en el eje horizontal, el eje de abscisas, el eje *OX*. La *y* es la variable dependiente. Se representa en el eje vertical o de ordenadas, el eje *OY*. Ambas variables son números reales.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Def.: Se dice que una función f: $A \longrightarrow B$ es real si $B \subseteq \mathbb{R}$ (puede suponerse $B = \mathbb{R}$) y se dice que es de variable real si su dominio (conjunto de puntos inicial) es un conjunto de números reales ($A \subseteq \mathbb{R}$).

En símbolos: $f\colon A \longrightarrow B;\ y = f(x)$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Siendo x la variable independiente o argumento e y la variable dependiente.

- **FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN**

1. Mediante el uso de tablas

x	0	1	2	3	−1	−2	...
$f(x)$	0	−2	−2	0	4	10	...

2. Gráficamente

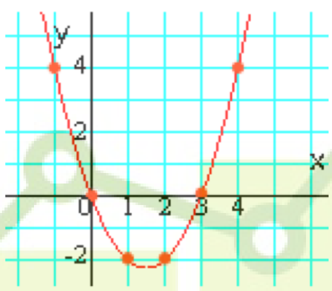
Gráficamente: Llamamos gráfica de una función real de variable real al conjunto de puntos del plano que referidos a un sistema de ejes cartesianos ortogonales tienen coordenadas $(x, f(x))$ donde $x \in A$.

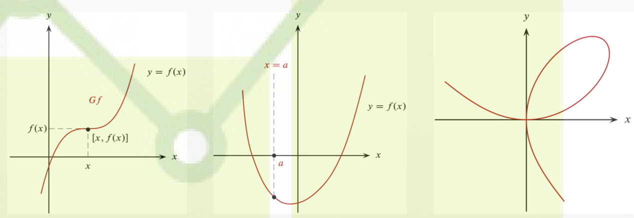
Observaciones

a). El dominio de la función se considera sobre el ***eje de abscisas (X)***.

b). El recorrido de la función se considera sobre el ***eje de ordenadas (Y)***.

c). Si trazamos paralelas al eje de ordenadas, éstas no pueden intersecar al gráfico de una función en más de un punto.





Sí Sí No

3. Analíticamente

Por ejemplo:

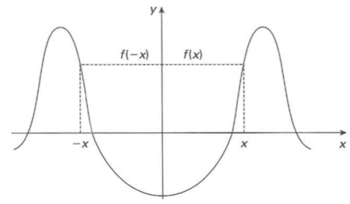
En $y = x^2 - 2$, $A = \mathbb{R}$ pues esa expresión está definida para cualquier valor de x.

En cambio, si la función está dada por $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$, la expresión está definida para cualquier valor de x excepto para x = -2. Luego, el dominio de la función es Df = $\mathbb{R}$ - {- 2}.

- **PARIDAD DE UNA FUNCIÓN**

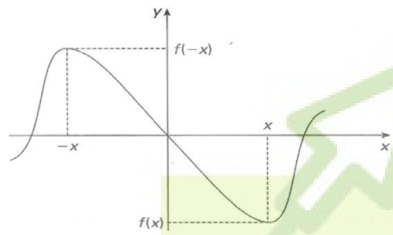
a). f es una función ***par*** $\leftrightarrow \quad \forall x \in A: f(-x) = f(x)$. Elementos opuestos del dominio tienen la misma imagen.

Simétrica respecto del eje de coordenadas.



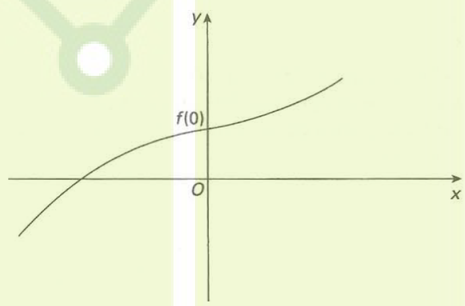
b). f es una función ***impar*** $\leftrightarrow \quad \forall x \in A: f(-x) = -f(x)$. A elementos opuestos del dominio les corresponden imágenes opuestas en el recorrido.

Simétrica respecto del origen de coordenadas.

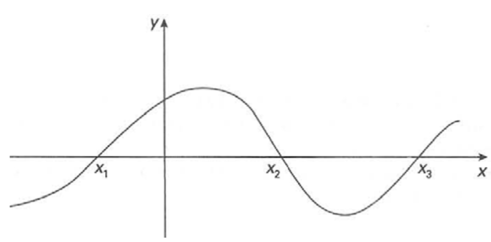


- **INTERSECCIÓN CON LOS EJES DE COORDENADAS**

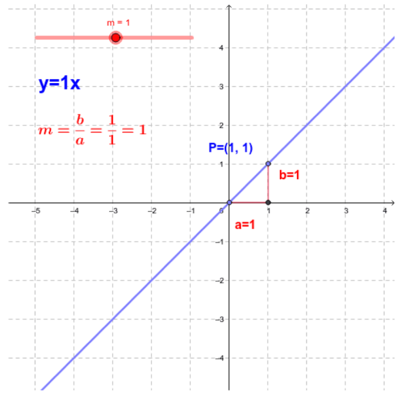
a). Con el eje de ordenadas (y). Se obtiene haciendo $x = 0$. $(0, f(0))$. Si existe, es único, tal como lo exige la definición de función.



b). Con el eje de abscisas (x). Se obtiene para aquellos valores x del dominio donde se anula el valor de la función (***ceros*** de la función o ***raíces*** de la ecuación) $f(x) = 0$.



1.2 ESTUDIO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES



FUNCIÓN LINEAL

Serán las funciones que tendrán la forma:

$$f(x) = mx + b$$

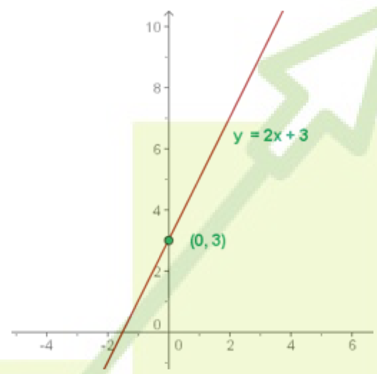
donde m y b son números reales llamados pendiente (m) y ordenada (b) al origen respectivamente.

Obs: $\tan\alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{b}{-b/m} = \mathrm{m}$

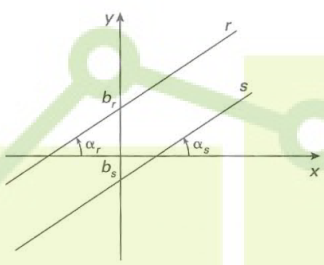
$$y = mx + b$$

Donde

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \rightarrow \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$



Rectas paralelas

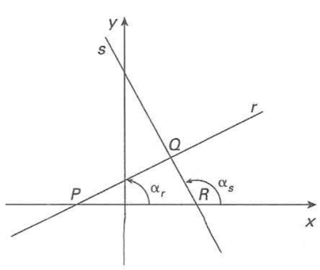


r: $y = m_r x + b_r$
s: $y = m_s x + b_s$
r // s $\leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$

$tg\ \alpha_r = tg\ \alpha_s \rightarrow m_r = m_s$

Para que dos rectas sean paralelas las pendientes deben ser iguales.

Perpendiculares



r: $y = m_r x + b_r$
s: $y = m_s x + b_s$
r $\perp$ s $\rightarrow \alpha_r = \alpha_s + 90º$

$tg\ \alpha_r = tg\ (\alpha_s + 90º) = -cotg\ \alpha_r = \frac{1}{tg\ \alpha_r}$

$m_s = -\frac{1}{m_r}$

La condición de perpendicularidad entre dos rectas es que la pendiente de una de ellas sea la recíproca cambiada de signo de la pendiente de la otra.

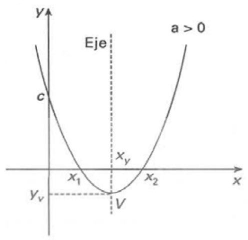
FUNCIÓN CUADRÁTICA

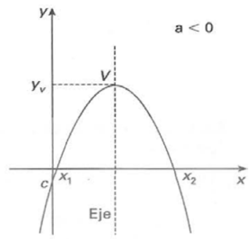
Responde a la fórmula:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{con } a \neq 0$$

Su gráfica es una curva llamada ***parábola*** cuyas características son:

a). Si $a > 0$ es cóncava y admite un mínimo.
Si $a < 0$ es convexa y admite un máximo.





b). *Vértice*: punto de la curva donde la función alcanza el mínimo o el máximo. Se obtiene:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = f(x_v) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

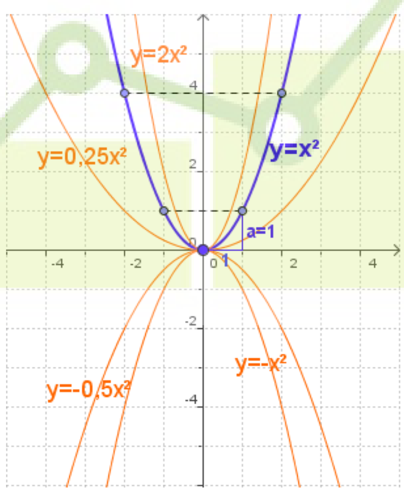
Luego $V = (x_v, y_v)$

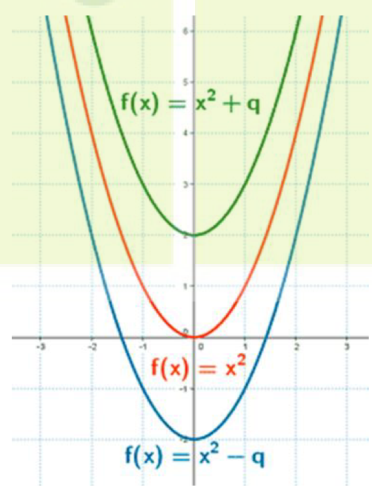
c). *Eje de simetría*: $x = x_v$

d). Intersección con el eje y: $(0, f(0)) = (0, c)$

e). Intersecciones con el eje x: resolviendo la ecuación de 2º grado $ax2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



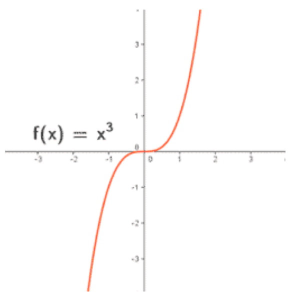


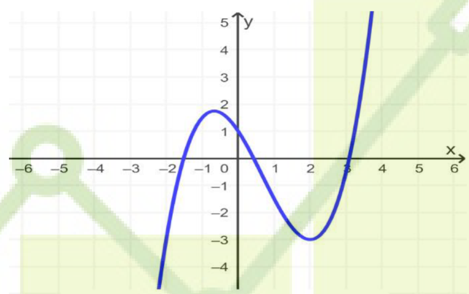
FUNCIONES POLINÓMICAS

Son las funciones de la forma: $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$, se dice que la función es de grado $n \in \mathbb{N}$.

Obs: Las funciones lineales y la cuadráticas son casos particulares de las funciones polinómicas, considerando n = 1 para las lineales y n = 2 para las cuadráticas.

Factorización de la función polinómica:
Dada la función $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0\ \forall\ a_i \in \mathbb{R}$, podemos escribirla como:
a) $y = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ si tiene n raíces reales simples
b) $y = a_j(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_j)^{k_j}$ si tiene j raíces reales múltiples



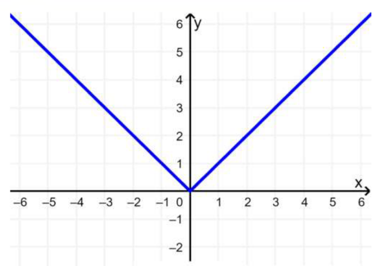


$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x + 1$

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Está definida por $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, el dominio de esta función son todos los números reales mientras que la imagen es $[0, \infty)$.
Obs.: Sea $a > 0$, entonces:

1.- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \ o \ x > a$
2.- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$



$f(x) = |x|$

- **FUNCIÓN HOMOGRÁFICA**

Responde a la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ donde $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$

Si:

.- $c = 0 \rightarrow y = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ la función sería lineal.

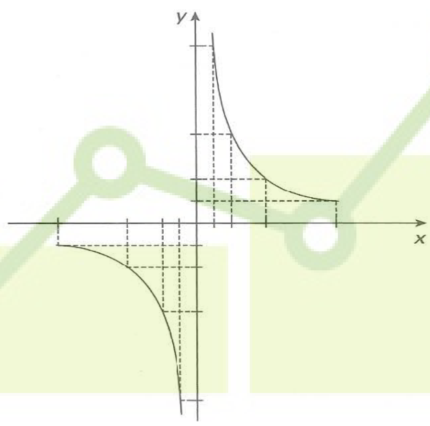
.- $ad - bc = 0 \rightarrow$ ad = bc $\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Luego, $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b\left(\frac{a}{b}x+1\right)}{d\left(\frac{c}{d}x+1\right)} = \frac{b}{d}$ la función es constante.

La función está definida para todo número x real excepto para aquel que anula el denominador.

$$Df = \{x \in \boldsymbol{R} /\ cx + d \neq 0\} = \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

Su gráfica es una curva llamada hipérbola.

Ejemplo. $y = \frac{1}{x}$, se ha tomado: $a = 0,\ b = 1,\ c = 1$ y $d = 0$ en la fórmula general de función homográfica.



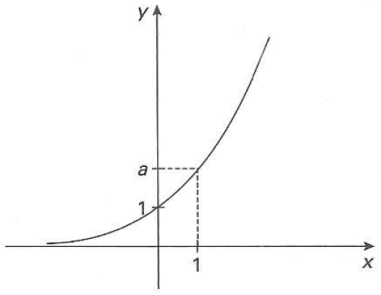
.- Conforme los valores de x están más próximos a 0 el valor absoluto de la función es cada vez mayor ($f(x)$ tiende a infinito cuando x se acerca a 0). La función no está definida en $x_0 = 0$, su dominio es $\boldsymbol{R} - \{0\}$. En $x = 0$ tiene una ***asíntota vertical***.

.- A medida que x crece en valor absoluto los valores de $f(x)$ se acercan a 0. Decimos que en $y = 0$ hay una ***asíntota horizontal***. Las asíntotas (los ejes coordenados en este caso) son perpendiculares (hipérbola equilátera) y se cortan en un punto que es centro de simetría de la curva.

.- La hipérbola tiene dos ramas simétricas respecto del punto de intersección, situadas en este caso en el 1er. Y 3er. cuadrante.

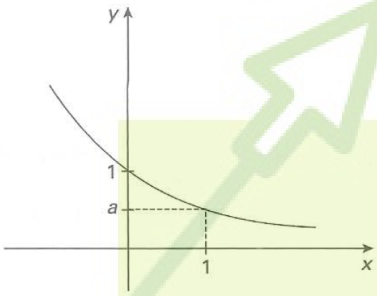
- **FUNCIÓN EXPONENCIAL**

Esta función es de la forma $y = a^x, a > 0$



1.- Si , $a > 1$, la función es

- Creciente
- Asintótica al semieje negativo de abcisas
- No tiene ceros
- $f(0) = 1, f(1) = a$



2.- Si , $0 < a < 1$, la función es

- Decreciente
- Asintótica al semieje positivo de abcisas
- No tiene ceros
- $f(0) = 1, f(1) = a$

En ambos casos $Dom f = \mathbb{R}$ y $Im f = (0, +\infty)$

- El eje OX, la recta $y = 0$, es una asíntota horizontal de la función; hacia $-\infty$ si $a > 1$, y hacia $+\infty$ si $0 < a < 1$.

- **FUNCIÓN LOGARÍTMICA**

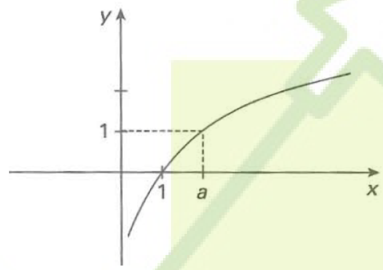
El logaritmo en base a $(a > 0, a \neq 1)$ de un número b $(b > 0)$ es el número c tal que $a^c = b$:

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

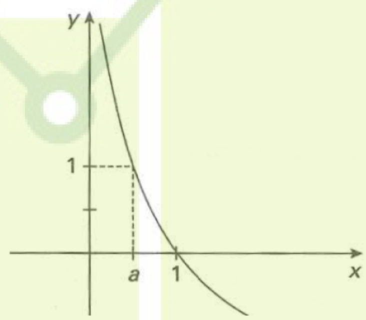
La función logarítmica responde a $y = log_a x$ con $a > 0, a \neq 1$. Su dominio $Dom f = (0, +\infty)$ y su imagen $Im f = \mathbb{R}$.
Si $a = 10$, diremos que es un logaritmo decimal y se expresa como $y = log\, x$
Si $a = e$, diremos que es un logaritmo neperiano o natural y se expresa como $y = ln\, x$

Características de la función logarítmica

1.- $a > 1$
.- Creciente
.- Asintótica al semieje negativo de ordenadas
.- $f(1) = 0 \wedge f(a) = 1$



2.- $0 < a < 1$
.- Decreciente
.- Asintótica al semieje positivo de ordenadas
.- $f(1) = 0 \wedge f(a) = 1$

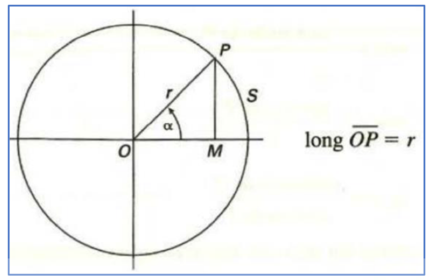


Propiedades de los logaritmos

1.- $\log_a 1 = 0$
2.- $\log_a a = 1$
3.- $\log_a a^x = x$
4.- $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
5.- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
6.- $\log_a b^n = n \log_a b$
7.- $a^{log_a b} = b$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

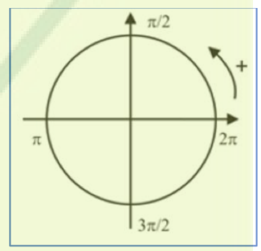
Consideremos una circunferencia de centro en el origen de coordenadas y de radio r. Sea S la longitud del arco de circunferencia que abarca un ángulo de amplitud α. Definimos $x = \frac{S}{r}$ (representa cuantas veces está contenido el radio r en el arco S)

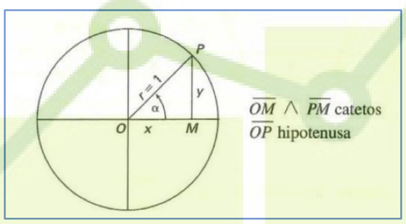


El sistema circular, para la medición de ángulos, toma como unidad un ángulo cuyo arco abarque la misma longitud que el radio de la circunferencia (S=r), a este ángulo se le denomina radián. Un ángulo de x radianes abarca un arco de longitud S = x·r.

Para relacionar los grados sexagesimales con los radianes hemos de tener en cuenta que el ángulo de 360^0 abarca un arco de longitud la longitud de la circunferencia.

Por tanto, $\alpha = \frac{longitud\ de\ la\ curcunferencia}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ radianes$





Las funciones trigonométricas se definen como (consideraremos la circunferencia de radio 1):

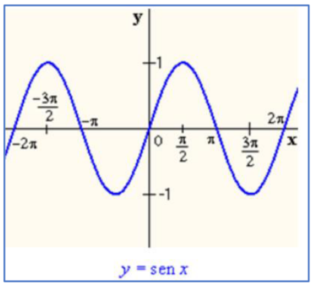
- $\sin\alpha = \frac{Ordenada\ del\ punto\ P}{r} = \frac{y}{r} = y,$
- $\cos\alpha = \frac{Abcisa\ del\ punto\ P}{r} = \frac{x}{r} = x,$
- $\tan\alpha = \frac{\mathrm{sinx}}{\cos x} = \frac{Ordenada\ del\ punto\ P}{Abcisa\ del\ punto\ P} = \frac{y}{x}$

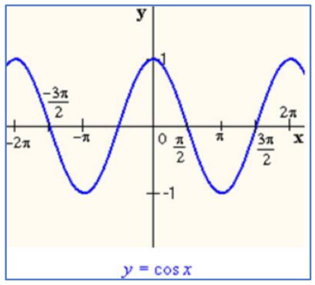
Obsérvese que el triángulo PMO cuyos vértices son el punto P, O y M. Es un triángulo rectángulo y por Pitágoras tenemos que $x^2 + y^2 = 1$ tenemos pues:

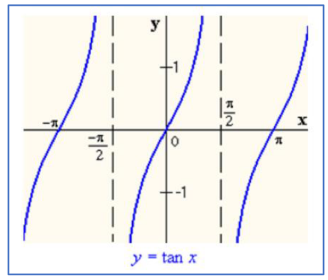
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Se llama relación fundamental de la trigonometría.

Veamos las gráficas de estas funciones:

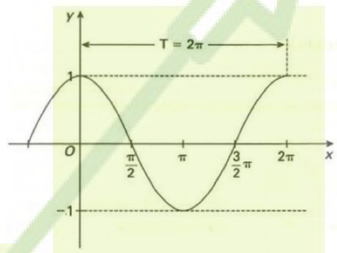






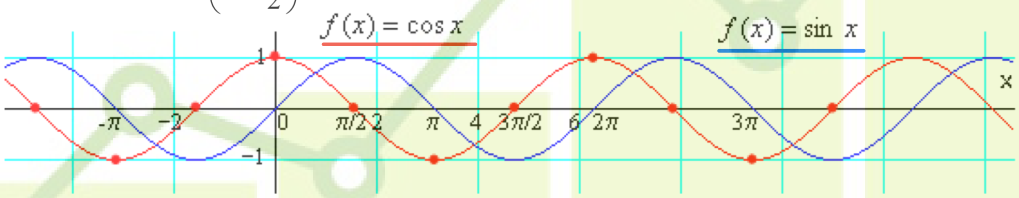
Para $y = \text{sinx}$ como $y = \cos x$ tenemos que $Domf = \mathbb{R}\ y\ Imf = [-1{,}1]$
Para $y = \tan x$ tenemos que $Domf = \left\{x \in \mathbb{R};\, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ \forall k \in \mathbb{Z}\right\}, Imf = \mathbb{R}$
Observemos que estas funciones son periódicas, esto es:

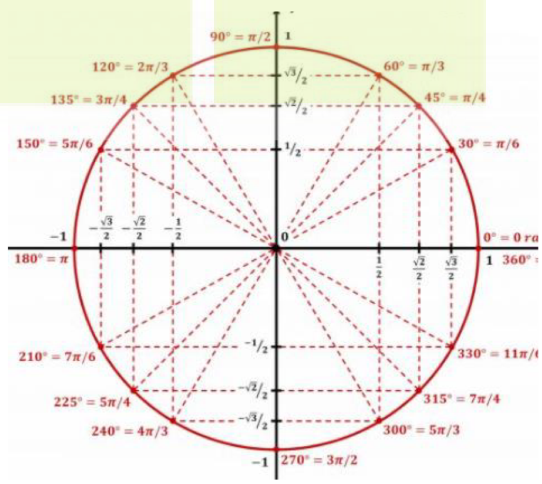
$\exists$ T tq $\text{f}(\text{x}+\text{T}) = \text{f}(\text{x})\ \forall \text{x} \in \mathbb{R}$, T es el periodo de la función



En el caso del seno y el coseno el periodo es 2π y en el caso de la tangente es π.

$$f(x) = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$





Otras funciones trigonométricas importantes:

- Cosecante: $y = \text{cosecx} = \frac{1}{sinx}$
- Secante: $y = \text{secx} = \frac{1}{cosx}$
- Cotangente: $y = \text{cotanx} = \frac{1}{tanx} = \frac{cosx}{sinx}$

1.3 DOMINIO DE FUNCIONES

Def.: El dominio de una función real, es el conjunto de elementos para los cuales la función está definida. Dicho de otra manera, el subconjunto de los números reales que tienen imagen. Formalmente:

$$Domf = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ \exists y = f(x) \in \mathbb{R} \}$$

Determinar el dominio de una función real de variable real (función escalar) definida mediante una fórmula $y = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ cuando éste no está indicado significa hallar el subconjunto de números reales más amplio posible para el cual la expresión $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ tenga sentido y tome valores reales.

Aspectos para tener en cuenta en el cálculo del dominio:

1.- Denominadores. Cuando en la expresión $f(x)$ figuren denominadores, estos no pueden valer cero.

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)(x-3)}$$

Plantearemos que $(x+1)(x-3) \neq 0 \ \rightarrow \ x \neq 1 \wedge x \neq 3$. Por lo tanto el dominio de la función es $Df = \boldsymbol{R} - \{-1, 3\}$.

2.- Radicales. Cuando figuran radicales de índice par, los radicandos no pueden tomar valores negativos.

$$f(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$$

Plantearemos que $(x+1)(x-3) \geq 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x - 3 \geq 0$. Completando cuadrados:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 \geq 0 \ \rightarrow \ (x-1)^2 - 4 \geq 0 \ \rightarrow \ (x-1)^2 \geq 4 \ \rightarrow \ |x-1| \geq \sqrt{4} \ \rightarrow \ |x-1| \geq 2$$

$$x - 1 \geq 2 \ V \ x - 1 \leq -2 \ \rightarrow \ x \geq 3 \ V \ x \leq -1$$

El dominio de la función es $Df = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

3.- Argumentos de logaritmos. Cuando figure un logaritmo, su argumento no puede ser nulo ni negativo.

$$f(x) = \log[(x+1)(x-3)]$$

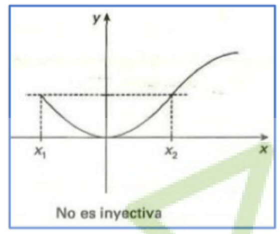
Plantearemos que $(x+1)(x-3) > 0 \ \rightarrow \ x > 3 \ V \ x < -1$. Por lo tanto el dominio de la función es $Df = (-\infty, -1)] \cup [3, +\infty)$

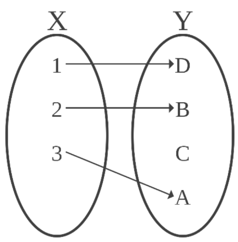
1.4 CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

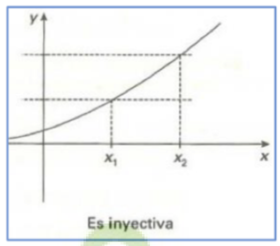
1.- Función inyectiva: $f: A \longrightarrow B$ es inyectiva si y sólo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el codominio (B).

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ o bien } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Gráficamente, si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje x no puede intersecar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del codominio (B) puede ser imagen de más de un elemento del dominio.







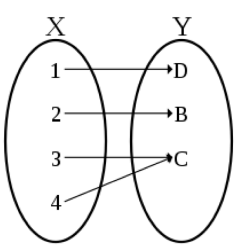
Respuesta: Es una función inyectiva, ya que cada elemento del recorrido, solo recibe <u>una</u> flecha desde X, es decir, cada imagen solo tiene una preimagen.

Como se puede ver, el elemento C del conjunto Y es parte del codominio pero no pertenece al recorrido, pero, como no es necesario que estos coincidan, igual es una función inyectiva.

2.- Función suprayectiva o sobreyectiva o **exhaustiva**: $f: A \longrightarrow B$ es sobreyectiva si y sólo si todos los elementos del codominio (B) tienen preimagen en el dominio (A). Dicho con otras palabras el codominio (B) y el recorrido o imagen Imf deben coincidir.

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ tq } y = f(x)$$

Por tanto, si piden una **demostración** de que una función real es sobreyectiva, podemos hallar la imagen de dicha función. Si la imagen es el conjunto de los reales, la función es sobreyectiva. En caso contrario, no.



Respuesta: Es una función sobreyectiva, ya que cada elemento de Y recibe al menos una flecha desde X, es decir, todas las imagen tienen al menos una preimagen.

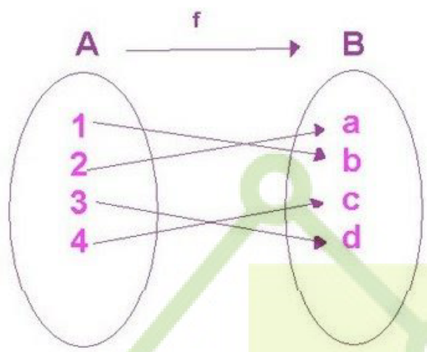
Como se puede ver, el elemento C es imagen de 3 y 4, esto no afecta para que sea función sobreyectiva.

2.- Función biyectiva: Una función es biyectiva, cuando es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Es decir, para cualquier elemento y del codominio existe un único elemento x del dominio tal que y es la imagen de x por f.

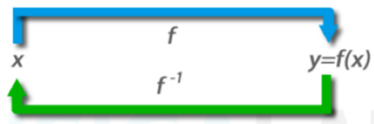
Si se representa una **función biyectiva**, en un diagrama sagital, de una función ***f*** de **A** en **B**, veríamos que **<u>todos</u> los elementos B tienen <u>sólo</u> una flecha desde el conjunto A.**

Ejemplo de función biyectiva en un diagrama sagital.



1.5 FUNCIÓN INVERSA

Dada una función *f(x)* que asocia a cada elemento *x* del dominio su imagen *f(x)* del recorrido, su función **inversa** o **recíproca** *f-1(x)*, de existir, es aquella que, aplicada sobre los elementos del recorrido de *f(x),* les asocia su antiimagen en el dominio de la misma.



Dada una función inyectiva *f(x)*, se define su **función inversa**, también conocida como **función recíproca**, como:

$$\mathrm{f}^{-1}: Recf \rightarrow Domf \;\; ; \mathrm{f}^{-1}(y) = x$$

Donde:

- *Recf :* Es el dominio de la función f^{-1}, y a su vez es el recorrido de la función *f*
- *Domf :* Es el recorrido de la función f^{-1}, y a su vez es el dominio de la función *f*
- *y :* es un elemento cualquiera del dominio de f^{-1}, y a su vez del recorrido de *f*
- *x :* es un elemento cualquiera del recorrido de f^{-1}, y a su vez del dominio de *f*

Condición para que exista la función inversa: En la propia definición obligamos a que *f(x)* sea **inyectiva**. Recuerda que una función se dice que es inyectiva cuando *todos los elementos del dominio tienen imágenes distintas*. La condición de inyectividad es necesaria para la existencia de la inversa porque, de lo contrario, dado un elemento del recorrido ¿qué elemento debería devolver la función inversa?

Resulta más sencillo identificar una función inversa de otra a partir de la siguiente **propiedad**:

- $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) = (\mathrm{f}^{-1} \circ \mathrm{f})(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ (Es decir, componiendo una función con su inversa el resultado es la función identidad, aplicando primero f y luego f^{-1} sobre un punto del dominio obtenemos ese mismo punto).

Ejemplo.

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Analizar inyectividad

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \rightarrow \quad \frac{x_1 + 1}{x_1 - 2} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 2} \quad \rightarrow \quad (x_1 + 1)(x_2 - 2) = (x_2 + 1)(x_1 - 2)$$

$$\rightarrow \quad x_1 x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 = x_1 x_2 - 2x_2 + x_1 - 2 \quad \rightarrow \quad x_2 + 2x_2 = x_1 + 2x_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Es inyectiva.

Despejamos x.

$$x = \frac{2y + 1}{y - 1}$$

Cambiamos las variables

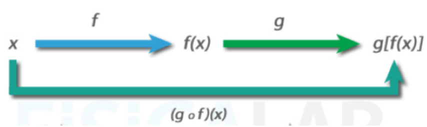
$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

Definamos la función inversa:

$$f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

1.6 FUNCIÓN COMPUESTA

La **función compuesta** es aquella que se obtiene mediante una operación denominada **composición de funciones,** que consiste en aplicar de manera *sucesiva* las funciones que forman parte de la operación. Así, la función compuesta de *f(x)* y *g(x)* es otra función obtenida aplicando g a las imágenes de *f*.



Def.: Dadas dos funciones $\mathrm{f}: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$, $\mathrm{f}: \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$, con $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{M}$; se llama composición de f con g a la función $\mathrm{g} \circ \mathrm{f}: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{N}$ definida por $(\mathrm{g} \circ \mathrm{f})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))$.

Obsérvese que para que la función compuesta $\mathrm{g} \circ \mathrm{f}$ exista es necesario que la imagen de f esté incluida en el dominio de g, o sea, $\mathrm{Imf} \subseteq \mathrm{Domg}$.

Ejemplo. Hallar la composición de las siguientes funciones realizando, en los casos que sea necesario, restricciones.

$f(x) = \frac{x}{x+2}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

$$f \, o \, g(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$