1. Matrices

1.1. Definición

Es el conjunto de elementos (números reales) dispuestos rectangularmente en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}^{(\mathbb{R})}$$

donde a_{ij} es el elemento ubicado en la posición i (fila) j (columna).

1.2. Clasificación

Según sus dimensiones:

1. Fila: $1\times n$
2. Columna: $m\times 1$
3. Rectangular: $m\times n$
4. Cuadrada: $m\times m$

Según los elementos que la componen:

1. Traspuesta (A^t): Cambio de filas por columnas de A $\left(A^t = a_{ji}\right)$.
2. Opuesta (–A): Cambio de signo de los elementos de A $\left(-A = -a_{ij}\right)$.
3. Simétrica: Cuando $A = A^t$ $\left(a_{ij} = a_{ji}\right)$.
4. Antisimétrica: Cuando $A = -A^t$ $\left(a_{ij} = -a_{ji}\right)$ (La diagonal está compuesta de ceros)
5. Nula: Todos los elementos son cero.
6. Diagonal: Matriz cuadrada con 0 en los elementos que no pertenecen a la diagonal principal $\left(a_{ij} = 0; i \neq j\right)$.
7. Identidad (I_n): Matriz diagonal con 1 en la diagonal principal $\left(a_{ii} = 1; a_{ij} = 0\right)$.
8. Triangular: Aquella con ceros debajo de la diagonal principal («superior») o encima («inferior»).

1.3. Operaciones

No existe la división de matrices, pero sí la suma, la resta y el producto:

1. Suma/Resta: $A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 8 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 8 & 2 \end{pmatrix} =$$

Propiedades

- Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elemento neutro: $A + \theta = A$
- Matriz opuesta: $A+(-A) = \theta$
- Conmutativa: $A + B = B + A$

2. Producto de un escalar por una matriz: $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

Propiedades

- Asociativa: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- Distributiva: $\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B)$

2. Producto de dos matrices: $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B^t =$

Propiedades

- Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Distributiva: $A \cdot (B + C) = AB + AC$
  $(A + B) \cdot C = AC + BC$

1.4. Matriz inversa: Método de Gauss-Jordan

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden *n*, tales que su producto resulta la matriz identidad, entonces se dice que B es la inversa de A y se denota por A^{-1} (y viceversa).

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Entonces, $B = A^{-1}$, de manera que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Para calcular A^{-1} por el método de Gauss-Jordan, primero se asocia la matriz identidad (I_n) a la matriz A y después, mediante operaciones elementales de fila, se obtiene la matriz identidad donde estaba A, resultando A^{-1} donde estaba I_n.

$$(A|I_n) \longrightarrow (I_n|A^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Matriz inversa

Propiedades:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$
5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

1.5. Matriz traspuesta

Propiedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

1.6. Matriz identidad

Propiedad:

1. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

EJERCICIO

Dadas las matrices A, B y C, calcular $A \cdot B^t + 2 \cdot C^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Dadas las matrices A, B y C, calcular $2\cdot A\cdot B^t + C^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Determinantes

2.1. Definición

Los determinantes son el valor escalar resultante de multiplicar los elementos de las diagonales de una matriz cuadrada.

1. Segundo orden
   Producto de los elementos de la diagonal principal menos el de la secundaria.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2. Tercer orden
   Regla de Sarrus: suma de los productos de los elementos de las diagonales descendentes menos la suma de los productos de los elementos de las ascendentes.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Mayor de tercer orden

El adjunto de un elemento a_{ij} es el producto de $(-1)^{1+j}$ por el determinante de la matriz resultante de eliminar la fila i y la columna j. Aunque también sirve para determinantes de orden uno, dos y tres, calcular el determinante por adjuntos consiste en sumar los adjuntos de cada elemento de una línea (fila o columna).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{14}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2.Propiedades

1. Si se multiplica una línea (fila o columna) por un número real, entonces el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3|A| = 3 \cdot 2 = 6$$

2. El determinante de un producto es igual al producto de sus determinantes.

$$|AB| = |A||B|$$

3. Un determinante se puede descomponer en suma de dos o más determinantes del mismo orden. El desarrollo se hace sobre una línea (fila o columna).

$$|A| = \begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

4. Si se permutan dos líneas (filas o columnas) entre sí, el determinante cambia de signo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

5. Si tiene una línea (filas o columnas) de ceros, el determinante es cero.
6. Si tiene dos líneas (filas o columnas) iguales, el determinante es cero.
7. Si tiene dos líneas (filas o columnas) proporcionales, el determinante es cero.
8. Si una línea (fila o columna) es combinación lineal de otra, el valor del determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{debido a que} \quad F_3 = 2F_1 + C_2$$

9. Si a los elementos de una línea (fila o columna) se les suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 16 \quad \rightarrow \quad C_3' = 2C_1 + C_2 + C_3 \quad \rightarrow \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 16$$

2.3.Matriz inversa: Método del determinante

Se recomienda calcularla a través del determinante para realizar menos operaciones que por el método de Gauss:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A^t)}{|A|} = \frac{[\mathrm{adj}(A)]^t}{|A|}$$

donde

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.4. Rango

Es el número de filas independientes, es decir, que no son combinación lineal de las otras. Se puede calcular mediante determinantes menores, pero se recomienda el método de Gauss.

1. Menores
   Se denomina «menor de orden p» de una matriz a los determinantes de las submatrices de orden *p*. Por tanto, el rango de una matriz es la máxima dimensión *p* del menor no nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

2. Gauss
   Mediante operaciones elementales de fila se hacen ceros debajo de la diagonal principal («triangular superior»). El rango será el número de filas que no estén compuestas en su totalidad por ceros. En caso de que la primera columna sea totalmente de ceros, entonces la diagonal principal se desplaza una posición hacia la derecha.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para discutir el rango de una matriz a partir de un parámetro *k*, se procede de la siguiente manera:

- Paso 1. Se calcula el determinante en función de *k* y se iguala a cero para calcular los diferentes valores de *k* que anulan dicho determinante. Cuando k es distinto a esos valores, el rango es máximo y su valor es igual al orden de la matriz.
- Paso 2. Se sustituye *k* para cada uno de los valores y se calculan los rangos correspondientes mediante el método de Gauss.
- Paso 3. Se hace un resumen donde aparezcan los rangos de la matriz en función de los diferentes valores de *k*.

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 2-k & 2 & 2-k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Dadas las matrices A, B y C, calcular $A \cdot B^t + 2 \cdot C^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO

Comprobar que, si en la matriz A de la pregunta 2 tomamos $k = 1$, entonces la matriz A es invertible y calcular su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sistemas de ecuaciones

3.1. Definición

Un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas se describe de forma general como AX = B, donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de las incógnitas y B la matriz columna de resultados (o términos independientes). De aquí se desprende el concepto de matriz ampliada (A*):

$$\begin{cases} a_{11}x & +a_{12}y & +a_{13}z & =b_{11} \\ a_{21}x & +a_{22}y & +a_{23}z & =b_{21} \\ a_{31}x & +a_{32}y & +a_{33}z & =b_{31} \end{cases}$$

$$AX = B \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{31} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3x & -2y & +\ z & =20 \\ x & & +3z & =14 \\ & y & -\ z & =-4 \end{cases}$$

3.2. Clasificación

También conocido como el teorema de Roché-Frobenius (*n* = número de incógnitas):

1. $R(A) = R(A^*) = n$: Sistema compatible determinado
2. $R(A) = R(A^*) < n$: Sistema compatible indeterminado
3. $R(A) < R(A^*)$: Sistema incompatible

La clasificación se puede llevar a cabo por determinantes o bien por el método de Gauss o bien por el de determinantes menores (Tema 2.4).

$$\begin{cases} 2x & - & y & -2z & = 2 \\ -x & + & y & + z & = 4 \\ x & - & 2y & + z & = 2 \end{cases}$$

3.3. Resolución

Se recomienda el método de Gauss para la resolución del sistema porque también sirve para su clasificación. En otro caso se debe usar el método de Cramer:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{31} \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} 2x & - & y & -2z & = 2 \\ -x & + & y & + z & = 4 \\ x & - & 2y & + z & = 2 \end{cases}$$

Para discutir un sistema de ecuaciones a partir de un parámetro *k,* se clasifica éste de acuerdo con los rangos de la matriz de coeficientes (A) y de la matriz ampliada (A*). El procedimiento es el siguiente:

- Paso 1. Se calcula el determinante de A y se iguala a cero para calcular los diferentes valores de *k* que anulan dicho determinante. Cuando *k* es distinto a esos valores, el sistema es compatible determinado: R(A) = R(A*) = n.
- Paso 2. Se sustituye *k* para cada uno de los valores obtenidos en el paso anterior y se clasifica el sistema por el método de Gauss.
- Paso 3. Se hace un resumen donde aparezcan las clasificaciones del sistema en función de los diferentes valores de *k*.

$$\begin{cases} ax - 3y = -4 \\ x + ay + az = 2 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO

Resolver el sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

Nota: expresar la solución dejando libre la variable z.

EJERCICIO

Dado el sistema,

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = 4 \\ ax + z = 2 \end{cases}$$

(a) Determinar para qué valores de parámetro *a* el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. (*1 punto*)

(b) Resolver el sistema para a = 1. *(0,75 puntos)*

(c) Resolver el sistema para a =2. *(0,75 puntos)*