Vectores

Antes de ver que son los vectores y qué podemos hacer con ellos veremos una de las estructuras matemáticas más útiles , **los espacios vectoriales.**

Espacios vectoriales, R^n

Dentro de las distintas estructuras matemáticas, existe una en espacial , que posee una serie de propiedades que la hace especialmente útil a la hora de trabajar con sus elementos , me estoy refiriendo a los **espacios vectoriales**.

En el fondo un espacio vectorial no deja de ser un conjunto que tiene elementos, a los cuales llamaremos **vectores** . Estos elementos (vectores) poseen una serie de propiedades muy interesantes que en breve describiremos.

Sería muy banal pensar que un espacio vectorial en general y los vectores en particular sólo son entes que existen en nuestra mente y que carecen de una aplicación práctica y directa . Imaginemos un avión que está en vuelo y que en un momento concreto debe cambiar de **dirección** porque así se lo ha pedido la torre de control . En este caso el piloto le pedirá a la torre el nuevo vector hacia esa nueva posición . Lo que le está pidiendo el piloto a la torre es que le diga qué dirección debe coger para llegar a ese nuevo destino , pues bien , el vector será el encargado de establecer esa nueva dirección.

Con este ejemplo hemos visto que los vectores están más presentes en nuestras vidas de lo que podemos intuir .

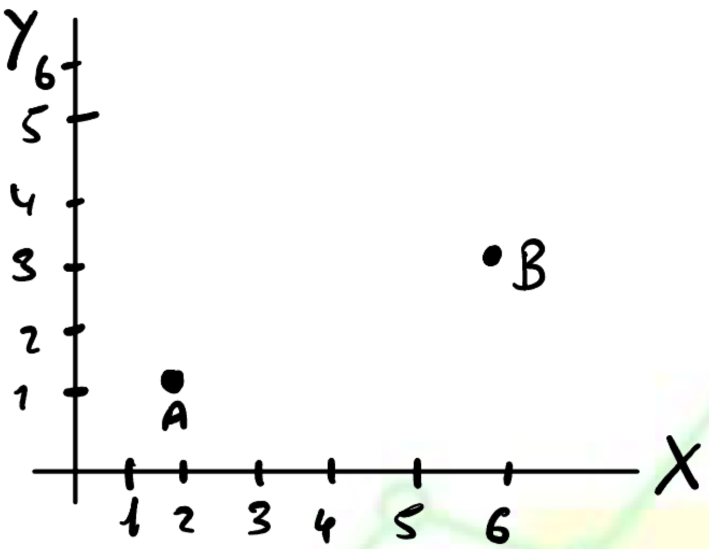
Dentro de los espacios vectoriales comenzaremos con uno de los más representativos , a saber , R^2

El espacio vectorial R^2

R2 es uno de los espacios vectoriales más conocidos . Cuando hablamos de **R2** en el fondo podríamos pensar en un plano .

Los elementos de **R2** son vectores que tienen dos coordenadas . Por ejemplo un elemento de **R2** podría ser (2,3). ¿ Pero qué es en fondo un vector ?.

Recordad que un vector es un elemento de un espacio vectorial y en este caso un vector de **R2** entre otras cosas nos indica una dirección o un camino para ir de un punto a otro



Imaginemos que estamos en el punto **A** y que queremos llegar al punto **B** . ¿ Cómo podemos conseguirlo ? . Pues una manera fácil sería avanzar 4 unidades en horizontal y 2 unidades en vertical . Esto en teoría sería un vector , en este caso será el vector (4,2) .

Vamos a ver una serie de propiedades que son propias de **todos los espacios vectoriales.** En este caso se verán para **R2** pero se pueden hacer propias para cualquier espacio vectorial **.**

En este curso analizaremos las propiedades a través de unos ejemplos, no es la práctica habitual en el mundo de las matemáticas pero para el propósito de este curso será suficiente.

Propiedades que debe cumplir todo espacio vectorial y en este caso R2

En un espacio vectorial podremos hacer operaciones con los vectores. Una de ellas será la suma la cual se hará de la siguiente manera

(4,6) + (5, -1) = (4+5 , 6 + (-1)) = (9 , 5)

De una manera más general (x1 , y1) + (x2 , y2) = (x1 + x2 , y1 + y2)

Propiedades

1. **Asociativa.**

$$(2,4)+\left((1,2)+(5,6)\right)=\left((2,4)+(1,2)\right)+(5,6)$$

2. **Conmutativa.**

$$(4,2)+(1,5)=(1,5)+(4,2)$$

3. **Elemento neutro**

$$(5,4)+(0,0)=$$

4. **Elemento opuesto**

$$(2,5)+(\quad,\quad)=(0,0)$$

En matemáticas a todo conjunto de elementos que cumplan estas cuatro propiedades se le conoce con el nombre de **Grupo abeliano o conmutativo**.

Ahora definiremos otra propiedad, que será la de multiplicar los vectores por un escalar (un número real) .

$$\lambda \in \mathbb{R}$$
$$u=(x_1,x_2)$$
$$\lambda u=\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$$

Ejemplo

$$3.(2,6)=(6,18)$$

Esta nueva operación cumple también con una serie de propiedades que veremos a continuación.

1. **Asociativa**

$$(\lambda\beta)u=\lambda(\beta u)$$

Ejemplo

λ=3
β=5
u=(1,4)

$$(3.5)(1,4)=3(5(1,4))$$

2. Distributiva respeto a la suma de escalares (número)

$$(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$$

Ejemplo

λ=3
β=5
u=(1,4)

$$(3+5)(1,4) = 3(1,4)+5(1,4)$$

3. Distributiva respecto a la suma de vectores

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$

Ejemplo

$\lambda = 3$
$u = (5,1)$
$v = (2,4)$

$$3\big((5,1)+(2,4)\big) = 3(5,1)+3(2,4)$$

4. Elemento neutro para el producto

$$1.u = u$$

Ejemplo

$$1.(3,6) =$$

Estas 8 propiedades que hemos visto , 4 para la suma y otras 4 para el producto son las que ha de cumplir un conjunto de elementos para que sea considerado un **espacio vectorial**.

Lo que hemos visto para **R2** es válido para **R3, R4, …. , Rn**

Combinaciones lineales .

La idea que hay debajo de este nuevo concepto es muy frecuente en nuestro día a día . Si uno piensa que está haciendo cundo escribe o cuando habla se dará cuenta que en el fondo está combinando una serie de letras que son las forman el abecedario. Con esas 27 letras nosotros podemos formar cualquier palabra de nuestro idioma.

Por ejemplo , para formar la palabra **oso** es suficiente con combinar dos veces la letra **o** y una vez la letra **s**.

Lo mismo podemos hacer con los vectores . Necesitaremos un conjunto de vectores que hagan el papel del abecedario que serán los que combinaremos para obtener cualquier otro vector .

Ejemplo

Sean **u = (2 , 3) v= (1, 6)**

¿ cómo debemos combinar los dos vectores u y v para obtener el vector w=(0 , 9)

$$x(2,3)+y(1,6)=(0,9)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 3x + 6y = 9 \end{array}\right\}$$

Otro ejemplo

Sean los vectores u=(1,1,0) , v= (1,0, 1) y w =(0,1,1) . ¿ Cómo podemos combinar esos tres vectores para obtener el vector r=(5, 2, 3) ?

$$x(1,1,0)+y(1,0,1)+z(0,1,1)=(5,2,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x+z=2 \\ y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ejercicios

c) ¿Es el vector $(4,4,4)$ igual a alguna combinación lineal de los vectores $(-1,0,1)$, $(1,2,3)$ y $(0,2,4)$? En caso afirmativo, escribir todas las formas de expresar tal combinación lineal.