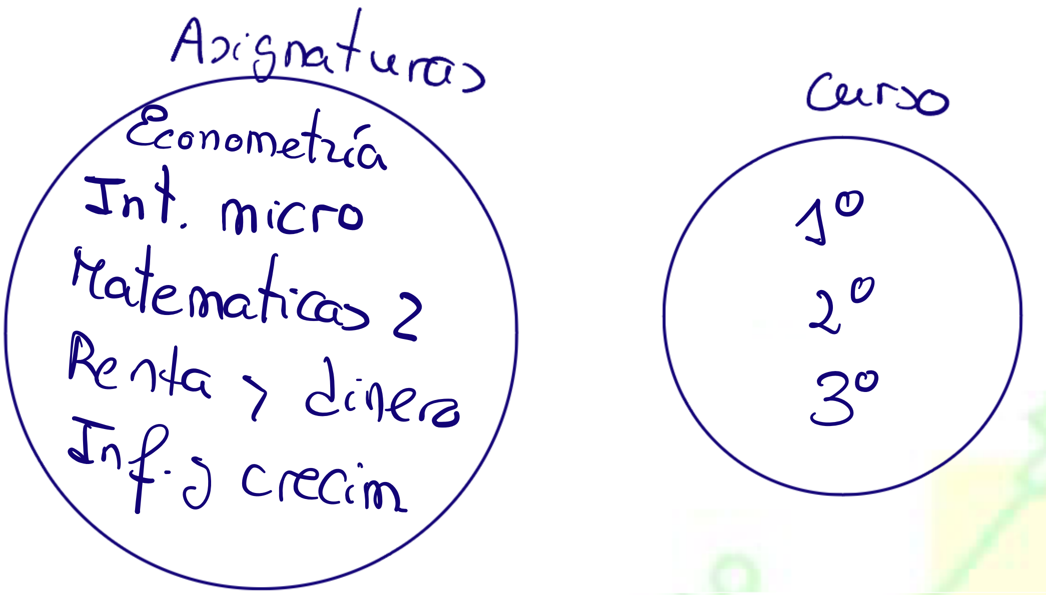
Aplicaciones lineales

INFO@ADEFACIL.COM

Una vez que hemos visto los espacios vectoriales, podemos analizar ciertos elementos que van a relacionar unos espacios con otros. En este caso veremos las aplicaciones lineales que simplemente son leyes que van a relacionar elementos de un espacio vectorial que llamaremos espacio de **partida** con elementos de otros espacio vectorial al que denominaremos espacio de **llegada.**



O viendo un ejemplo que tiene que ver más con la asignatura , en el que se relaciona cada vector de **R3** con su opuesto .

Definición de aplicación lineal

Una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales **f: *V* ——-> *W*** es una **ley** que relaciona elementos de un espacio vectorial (**espacio vectorial de partida V**) con elementos de otro espacio vectorial (**espacio vectorial de llegada W**) verificando dos propiedades

1. **Sean u y v dos elementos de V entonces se ha de verificar que**

   f (u + v) = f (u) + f (v)

2. **Sea u un elemento de U y λ un número real (escalar) entonces**

   f (λ u) = λ f (u)

Veamos un ejemplo de una aplicación lineal y veremos que se cumplen ambas propiedades

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (x+y,\ 2x-y)$$

Sean $u=(2,5)$ y $v=(4,-1)$

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$f(u+v) =$

$f(u) + f(v) =$

Sea $u=(3,6)$, $\lambda=4$

$f(\lambda u)=\lambda f(u)$

$f(\lambda u)=$

$\lambda f(u)=$

Una aplicación lineal tiene una serie de propiedades entre la que destacaremos la siguiente:

f (0) = 0

Veamos que es cierto en el ejemplo de la aplicación lineal anterior

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (x+y,\ 2x-y)$$

¿ Cómo se puede determinar una aplicación lineal ?

Una aplicación lineal se puede determinar de varias maneras :

1. **A través de una relación como la siguiente**

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \rightsquigarrow (2x-y,\ y+z)$$

2. A través de las imágenes de los elementos de una base . En este caso no nos hace falta tener la relación , solo es necesario saber las imágenes de los vectores de una base cualquiera del espacio vectorial de partida . Veamos un ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

Tomando **B= { (1, 0, 1) , (0 , 1 , 1) , (0 , 0 , 1) }** una base de **R3** cumpliendo lo siguiente

$$f(1,0,1) = (0,1)$$
$$f(0,1,1) = (1,1)$$
$$f(0,0,1) = (-1,1)$$

Con esto es suficiente para saber cómo actúa nuestra aplicación lineal . Veamos cómo podemos obtener la relación que define nuestra aplicación lineal .
Lo que tendríamos que hacer es relacionar los elementos de la base canónica del espacio de partida con la base que hemos elegido. Esto se hace de una manera muy sencilla

$B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\} \longrightarrow$ base elegida
$C=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \longrightarrow$ base canónica

$$(1,0,0) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ x+y+z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right);$$

$$x = 1, \; y = 0, \; z = -1$$

$$(0,1,0) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ x+y+z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = -1$$

$$(0,0,1) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y+z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1$$

Por tanto tenemos que

$(1,0,0) = 1\,(1,0,1) + 0\,(0,1,1) - 1\,(0,0,1)$
$(0,1,0) = 0(1,0,1) + 1(0,1,1) - 1(0,0,1)$
$(0,0,1) = 0\,(1,0,1) + 0\,(0,1,1) + 1(0,0,1)$

Una vez que hemos relacionado los vectores de la base canónica con los vectores de la base escogida ya tendríamos hecho el trabajo pesado . Ahora queda hacer lo siguiente

$$f(1,0,0) = 1\cdot f(1,0,1) + 0\, f(0,1,1) - 1\, f(0,0,1) = 1\cdot(0,1) + 0(1,1) - 1(-1,1) = (1,0)$$

$$f(0,1,0) = 0\, f(1,0,1) + 1\, f(0,1,1) - 1\, f(0,0,1) = 0(0,1) + 1(1,1) - 1(-1,1) = (2,0)$$

$$f(0,0,1) = 0\, f(1,0,1) + 0\, f(0,1,1) + 1\, f(0,0,1) = 0(0,1) + 0(1,1) + 1(-1,1) = (-1,1)$$

Por tanto

f(1,0,0) = (1,0)
f(0,1,0) = (2,0)
f(0,0,1)=(-1,1)

Ya sólo nos queda ver cuál es la relación que define nuestra aplicación lineal . Para ello tomaremos un vector cualquiera **(x, y, z)** del espacio vectorial de partida.

$$f(x,y,z) = x f(1,0,0) + y f(0,1,0) + z f(0,0,1) =$$
$$= x(1,0) + y(2,0) + z(-1,1) = (x+2y-z, z)$$

por tanto nuestra aplicación lineal será

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \rightsquigarrow (x+2y-z, z)$$

También se puede expresar $f(x,y,z) = (x+2y-z, z)$

Imagen y núcleo de una aplicación lineal .

Dada una aplicación lineal nos va a interesar conocer dos aspectos muy importantes de ella , a saber , su **imagen** y su **núcleo** (Kerf) . La **imagen** y el **núcleo** de una aplicación lineal nos va a aportar mucha información de la aplicación lineal. Veamos pues cómo podemos calcular la **imagen y el núcleo** de una aplicación lineal dada.

Es conveniente conocer la relación que define a nuestra aplicación lineal . Vamos a suponer que conocemos dicha relación.
Veamos cómo podemos calcular la imagen y el núcleo de una aplicación lineal cuando conocemos la relación que define a nuestra aplicación.

Ejemplo 1.

$$f(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ x+z)$$

El núcleo.

Para calcular el núcleo de una aplicación lineal tendremos que igualar a cero cada coordenada

$$\left.\begin{aligned} x+y\quad &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x\quad +z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Veamos otro ejemplo, sea

Ejemplo 2.

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y) = (x, y, x+y)$$

La imagen .

Para calcular la imagen deberemos tomar una base del espacio vectorial de partida, la que sea. Si es posible tomaremos la base canónica y calcularemos la imagen de cada uno de los vectores de la base que hayamos escogido.

En la aplicación del ejemplo 1 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ x+z)$$

tomaremos como base del espacio vectorial de partida la canónica

$$C = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$

Ahora calcularemos la imagen de cada uno de los vectores de la base canónica

$$f(1,0,0) = (1+0,\ 0+0,\ 1+0) = (1,0,1)$$
$$f(0,1,0) = (0+1,\ 1+0,\ 0+0) = (1,1,0)$$
$$f(0,0,1) = (0+0,\ 0+1,\ 0+1) = (0,1,1)$$

Una vez que hemos calculado las imágenes de los vectores de la base , nos quedaremos con los que sean linealmente independientes. La imagen será el subespacio vectorial formado por los vectores que sean independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la imagen será el subespacio vectorial formado por los vectores que sean linealmente independientes , en este caso

En el segundo ejemplo , la imagen será

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y) = (x, y, x+y)$$

tomamos la base canónica y calculamos las imágenes

$$C = \{ (1,0), (0,1) \}$$

$$f(1,0) = (1, 0, 1+0) = (1, 0, 1)$$
$$f(0,1) = (0, 1, 0+1) = (0, 1, 1)$$

Ahora nos quedaremos con los que sean linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso son los dos linealmente independientes y por tanto la imagen será el subespacio vectorial determinado por los vectores

$$\mathrm{Img}\, f = L((1,0,1),(0,1,1))$$

Matriz asociada a una aplicación lineal

Una aplicación lineal puede venir dada por la relación que la define o también por su matriz asociada . Ambas formas son equivalentes , por tanto para nosotros será lo mismo que nos den la relación o la matriz asociada .

Hemos de tener claro una cosa , la matriz asociada se obtiene a partir de la relación que define a la aplicación lineal y de dos bases , una del espacio vectorial de partida y la otra del espacio vectorial de llegada .

Tomando la aplicación del primer ejemplo

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ x+z)$$

Si no nos dan las bases , podemos elegir nosotros las bases que queramos . Lo normal es que si podemos elegir es que tomemos las bases canónicas .

$$C_p = \{ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \}$$

$$C_\ell = \{ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \}$$

En este caso las bases canónicas de ambos espacios son iguales ya que el espacio de partida y llegada coinciden .

Tomaremos ahora las imágenes de los vectores de la base elegida en el espacio de partida

$$f(1,0,0) = (1+0,\ 0+0,\ 1+0) = (1,0,1)$$

$$f(0,1,0) = (0+1,\ 1+0,\ 0+0) = (1,1,0)$$

$$f(0,0,1) = (0+0,\ 0+1,\ 0+1) = (0,1,1)$$

Para calcular la matriz asociada , cogeremos las imágenes de los vectores de la base del espacio vectorial de partida y los colocaremos como columnas. Esto es muy importante, se han de colocar como columnas . La matriz resultante será la matriz asociada, en nuestro caso :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de una aplicación lineal .

El rango de una aplicación lineal se define como la dimensión del subespacio Imagen de f .

Una manera más sencilla de calcular el rango de una aplicación lineal es coger las imágenes de los vectores de una base del espacio vectorial de partida y calcular el rango de dicho conjunto de vectores .

En el ejemplo anterior

$$f(1,0,0) = (1+0,\, 0+0,\, 1+0) = (1,0,1)$$
$$f(0,1,0) = (0+1,\, 1+0,\, 0+0) = (1,1,0)$$
$$f(0,0,1) = (0+0,\, 0+1,\, 0+1) = (0,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones lineales inyectivas

Diremos que una aplicación lineal **f: Rn ———> Rm** es inyectiva si su núcleo es **Ker f**= { 0 }.

Veamos unos ejemplos

¿ Es inyectiva la siguiente aplicación lineal ?

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ x+z)$$

Aplicaciones lineales Suprayectiva

Una aplicación lineal **f : Rn ——> Rm** es **suprayectiva** si la dimensión de la **Imagen de f** coincide con la dimensión del espacio vectorial de llegada .

Veamos cómo podemos ver si una aplicación lineal es **suprayectiva .** Pasos a seguir

1. **Elegir una base del espacio vectorial de partida**
2. **Calcular las imágenes de los vectores de la base elegida y después el rango de dichas imágenes.**
3. **Comparar el rango de las imágenes calculado y el del espacio vectorial de llegada.**

Nota : **cuando el núcleo = { 0 } diremos que la dimensión del núcleo es = 0**

Veamos un ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (x-y \,,\, x+y)$$

Isomorfismos

Si una aplicación lineal es inyectiva y suprayectiva a la vez diremos que dicha aplicación lineal es un **isomorfismo .**
Por tanto para ver si una aplicación es un **isomorfismo :**

1. **Debe ser inyectiva , es decir su núcleo debe ser Ker f = { 0 }**
2. **Debe ser suprayectiva , es decir**

dimensión Img f = dimensión espacio vectorial de llegada

Teorema de las dimensiones .

A veces es útil utilizar la siguiente ecuación para averiguar si una aplicación es inyectiva o suprayectiva.

Sea **f : Rn ——-> Rm** una aplicación lineal , entonces se ha de verificar la siguiente ecuación

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Img} f$$