INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES

En este apartado, presentamos las matrices, las cuales nos permitirán escribir de forma cómoda y sintética los sistemas de ecuaciones lineales y nos facilitarán el desarrollo de su resolución. Nos limitamos a los conceptos sobre ellas de que haremos uso para sistemas (básicamente, matriz escalonada, matriz escalonada reducida y transformación elemental). A partir del CAPÍTULO II, estudiaremos las matrices de nuevo con mayor profundidad y detalle.

Podemos ganar operatividad y comodidad si simplificamos la representación de un sistema escribiendo sus coeficientes y términos independientes en una suerte de tablas rectangulares. Por ejemplo, para el sistema de ecuaciones lineales (2), podemos escribir sus coeficientes tabulados, así:

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} x + y + z &= 0\\ 2x + y - z &= 3\\ -x + 2y + z &= -2.\end{aligned}\right.$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (10)$$

Una tabla como la escrita en (10) es un ejemplo de un objeto matemático denominado **matriz**. Los números que se escriben en una matriz se denominan *términos* de la matriz. Podemos notar, por ejemplo, que los términos de la *primera fila* de la matriz (la de arriba), leídos de izquierda a derecha, son precisamente los coeficientes que acompañan a las incógnitas x, y y z en la *primera ecuación* del sistema: 1, 1 y 1, respectivamente. Asimismo, los términos de la *primera columna* (la de la izquierda), leídos de arriba abajo, son los coeficientes que acompañan a la *primera incógnita* en las ecuaciones primera, segunda y tercera: 1, 2 y -1, respectivamente. Cada fila de la matriz se corresponde con una ecuación, y cada columna con una incógnita.

La matriz que hemos escrito en (10) es la llamada **matriz de coeficientes** (o **matriz asociada**) del sistema de ecuaciones lineales (2). Pero la matriz de coeficientes no incluye los términos independientes del sistema de ecuaciones. Estos se incorporan en la llamada **matriz ampliada** del sistema, resultante de adjuntar a la matriz de coeficientes una columna más (a la derecha) con los términos independientes. La matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales (2) es:

$$\left\{\begin{aligned} 1x + 1y + 1z &= 0 \\ 2x + 1y - 1z &= 3 \\ -1x + 2y + 1z &= -2. \end{aligned}\right. \qquad \hat{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

MÉTODO DE GAUSS EN FORMA MATRICIAL

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ -x + 2y + z = -2. \end{cases}$$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

$F3 + F1 \rightarrow F3$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 2 & -2 \end{array}$$

$F2 - 2F1 \rightarrow F2$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -3 & 3 \end{array}$$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow F_3 + F_1]{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

$F3 + 3F2 \rightarrow F3$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & 9 \\ \hline 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) = \hat{A}'$$

La matriz escalonada obtenida se denota por $\hat{A}'$ (añadimos una "prima" a la letra que designa la matriz original). Ahora, podemos resolver el sistema de ecuaciones lineales que tiene como matriz ampliada la matriz $\hat{A}'$

$$\hat{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

$x + y + z = 0 \longrightarrow x = -y - z = 0 - (-1) = 1$

$-y - 3z = 3 \longrightarrow y = -3 - 3(-1) = 0$

$-7z = 7 \longrightarrow z = \frac{7}{-7} = -1$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}}$$

GAUSS-JORDAN

$$\hat{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow (-1/7)F_3]{F_2 \leftarrow (-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right);$$

en segundo lugar, hacemos ceros en la tercera columna, en todos los términos menos el pivote:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftarrow F_1 - F_3]{F_2 \leftarrow F_2 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right);$$

finalmente, hacemos ceros en todos los términos de la segunda columna salvo el pivote (para ello solo queda un término no nulo):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

$x = 1$
$y = 0$
$z = -1$

Esta última matriz ya es escalonada reducida; la denotamos por $\hat{A}''$ (añadiendo una "prima" más a la letra).