EJERCICIOS: INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1 Resolver, tanto por sustitución como por reducción, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 6 \\ -x + 3y = 2. \end{array}\right\}$$ 2 ecuaciones, 2 incognitas

* Sustitución

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 6 \\ -x + 3y = 2 \end{array}\right. \longrightarrow x = 6 - y$$

$$-(6-y) + 3y = 2$$

$$-6 + y + 3y = 2 \rightarrow 4y = 8 \rightarrow y = \frac{8}{4} = 2$$

$$x = 6 - 2 = 4$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \end{array}}$$

(4,2)

* Reducción:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 6 \\ -x + 3y = 2 \end{array}\right. \xrightarrow[2^a + 1^a]{} \left\{\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 4y = 8 \end{array}\right. \xrightarrow[2^a/4]{} \left\{\begin{array}{l} x + y = 6 \\ y = 2 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} x + y = 6 \\ -x + 3y = 2 \\ \hline \cancel{} \quad 4y = 8 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{1^a - 2^a \\ F1 - F2}]{} \left\{\boxed{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \end{array}}\right.$$

$$\begin{array}{r} x + y = 6 \\ - \quad y = 2 \\ \hline x \quad \cancel{} = 4 \end{array}$$

2 Resolver por igualación este sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 2y = -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 2y = -2. \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x = 8 - 3y \rightarrow x = \dfrac{8-3y}{2} \\ 5x = -2 - 2y \rightarrow x = \dfrac{-2-2y}{5} \end{array}$$

$$\frac{8-3y}{2} = \frac{-2-2y}{5}$$

$$5(8-3y) = 2(-2-2y)$$

$$40 - 15y = -4 - 4y$$

$$-15y + 4y = -4 - 40$$

$$+11y = +44$$

$$11y = 44 \longrightarrow y = \frac{44}{11} = 4$$

$$x = \frac{8-3y}{2} = \frac{8-3\cdot 4}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 4 \end{array}}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \checkmark \\ 5x + 2y = -2. \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} 2(-2) + 3\cdot 4 = -4 + 12 = 8 \checkmark \\ 5(-2) + 2\cdot 4 = -10 + 8 = -2 \checkmark \end{array}$$

$\checkmark$

3 Treinta y cinco garrafas de vino, unas de dos litros y otras de cinco, se llenan al vaciar completamente una tinaja que contiene cien litros. ¿Cuántas garrafas de cada tipo hay?

x ~ nº garrafas 2ℓ

y ~ nº garrafas 5ℓ

Total : 35 garrafas

$$\begin{cases} x + y = 35 \longrightarrow x = 35 - y \\ 2x + 5y = 100 \end{cases}$$

$$2(35 - y) + 5y = 100$$

$$70 - 2y + 5y = 100$$

$$-2y + 5y = 100 - 70$$

$$3y = 30 \longrightarrow y = \frac{30}{3} = 10$$

$$x = 35 - 10 = 25$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 10 \end{array}}$$

$x + y = 25 + 10 = 35$ ✓

$2x + 5y = 2 \cdot 25 + 5 \cdot 10 = 100$ ✓

4 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5y - z = 1 \\ 2x + 8y + 5z = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5y - z = 1 \\ 2x + 8y + 5z = 2. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 2x + 8y + 5z = 2 \\ 5y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{F2' = F2 - F1}$$

$$\xrightarrow{F2' = F2 - F1} \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5y = 1 \\ 5y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{F3' = F3 - F2} \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5y = 1 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 8y + 5z = 2 \\ -\ \ 2x + 3y + 5z = 1 \\ \hline \cancel{\ } \quad 5y \quad \cancel{\ } = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5y - z = 1 \\ -\ \ 5y \quad = 1 \\ \hline \cancel{\ } \ -z = 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{F1' = F1 + 5F_3} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5y = 1 \\ -z = 0 \end{cases} \xrightarrow{F_1' = F1 - \frac{3}{5} F2} \begin{cases} 2x = 2/5 \\ 5y = 1 \\ -z = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{r} 2x + 3y + 5z = 1 \\ +\quad\quad -5z = 0 \\ \hline 2x + 3y \quad \cancel{\ } = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x + 3y = 1 \\ -\quad \frac{3}{\cancel{5}} \cancel{5}y = 1 \cdot \frac{3}{5} \\ \hline 2x \quad \cancel{\ } = 2/5 \end{array} \Bigg\} \ 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{\substack{F1' = \frac{1}{2} F1 \\ F2' = \frac{1}{5} F2 \\ F3' = (-1) F3}} \begin{cases} x = \dfrac{2/5}{2} = \dfrac{\cancel{2}}{5} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} = \dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{5} \\ z = 0 \end{array}}$$

5 Considérese el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 1 \\ ax_1 + \quad x_2 = 1, \end{cases}$$

donde a designa un número (real).

a) ¿Es el par ordenado $(1,1)$ solución del sistema para algún valor de a?

b) ¿Hay solución cualquiera que sea el valor de a?

c) Si a es tal que el sistema admite alguna solución, encontrarlas todas.

a) $\begin{cases} x_1 + ax_2 = 1 \\ ax_1 + \quad x_2 = 1, \end{cases}$ $\quad x = 1$? $\quad y = 1$

$1 + a = 1 \longrightarrow a = 1 - 1 = 0$

$a + 1 = 1 \longrightarrow a = 1 - 1 = 0$

El punto $(1,1)$ es solución siempre que $a = 0$

b) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 1 \end{cases} \longrightarrow x = 1 - ay$

$\longrightarrow a(1 - ay) + y = 1$

$a - a^2y + y = 1 \longrightarrow -a^2y + y = 1 - a$

$y(1 - a^2) = 1 - a \longrightarrow y = \dfrac{1-a}{1-a^2}$

- $x = 1 - a\left(\dfrac{1-a}{1-a^2}\right)$
- $y = \dfrac{1-a}{1-a^2}$

$1 - a^2 = 0 \longrightarrow a^2 = 1 \quad a = \sqrt{1} = \pm 1$

El sistema tiene solución única para todo valor de a excepto para $a = 1$ o $a = -1$

* Si $a = 1$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

1 ecuación
2 incognitas
Infinitas soluciones

$y = 1 - x$

$x = \lambda$

$y = 1 - \lambda$

$(\lambda, 1-\lambda)$

* Si $a = -1$ $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $x = 1 + y$

$\longrightarrow -(1+y) + y = 1$

$-1 - \cancel{y} + \cancel{y} = 1$

$-1 \neq 1$

No hay solución

c) Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Rightarrow$ la solución:

- $x = 1 - a\left(\frac{1-a}{1-a^2}\right)$
- $y = \frac{1-a}{1-a^2}$

6 Considérese el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Justificar que es solución de este sistema cualquier par ordenado de la forma $(2+\lambda, \lambda)$ donde λ es un número real. Justificar que también es solución cualquier par ordenado de la forma $(2-2\lambda, -2\lambda)$ donde λ es un número real. ¿Hay alguna contradicción entre ambas afirmaciones?

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow[F2' = \frac{F2}{2}]{} \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

1 ecuación

2 incógnitas

$$\left.\begin{aligned} y &= \lambda \\ x &= 2 + y = 2 + \lambda \end{aligned}\right\} (2+\lambda, \lambda)$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \longrightarrow 2 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} \overset{?}{=} 2 \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} * \; y &= \lambda = -2\mu \\ x &= 2 + y = 2 + (-2\mu) = 2 - 2\mu \end{aligned}\right\} (2-2\mu, -2\mu)$$