INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

○ MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

La idea es esta: se despeja en una ecuación una de las incógnitas, y se sustituye lo obtenido en la otra ecuación, lo que nos lleva a una ecuación con solo una incógnita.

$$(1)\quad \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1. \end{cases} \longrightarrow y = 1 - 3x$$

$$4x - 2(1-3x) = 8$$

$$4x - 2 + 6x = 8$$

$$4x + 6x = 8 + 2$$

$$10x = 10 \longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{10} = 1 \\ y = 1 - 3x = 1 - 3\cdot 1 = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \end{aligned}}$$

punto $(\overset{x}{1}, \overset{y}{-2})$

○ **MÉTODO DE REDUCCIÓN**

Resolvamos ahora el sistema de ecuaciones lineales (1) con el método de *reducción* (también llamado de *eliminación*). La idea es "operar" con las ecuaciones del sistema de forma que se obtenga como resultado una ecuación en la que alguna de las incógnitas haya "desaparecido" —con lo que se "reduce" el número de incógnitas—. Por *operar* con las ecuaciones se entiende multiplicarlas por algún número y sumarlas o restarlas miembro a miembro; por *desaparecer* o *eliminar* una incógnita en una ecuación se entiende propiamente que su coeficiente correspondiente se hace nulo.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + \ y = 1. \end{cases}$$

1ª ecuación + 2x2ª ecuación

$\longrightarrow 2 \cdot 3x + 2y = 2 \cdot 1$

$$\begin{array}{r} 4x - 2y = 8 \\ + \quad 6x + 2y = 2 \\ \hline 10x + 0 = 10 \end{array}$$

$10x = 10 \longrightarrow x = \frac{10}{10} = 1$

$3x + y = 1 \longrightarrow y = 1 - 3x = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array}}$$

Pto $(1, -2)$

○ **MÉTODO DE IGUALACIÓN**

Despejamos la misma variable en cada una de las ecuaciones e igualamos las dos expresiones.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

$4x = 8 + 2y \longrightarrow x = \dfrac{8+2y}{4}$

$3x = 1 - y \longrightarrow x = \dfrac{1-y}{3}$

$\dfrac{8+2y}{4} = \dfrac{1-y}{3} \longrightarrow 3(8+2y) = 4(1-y)$

$24 + 6y = 4 - 4y$

$6y + 4y = 4 - 24$

$10y = -20$

$y = \dfrac{-20}{10} = -2$

$x = \dfrac{1-(-2)}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array}}$$

$4x - 8 = 2y \longrightarrow y = \dfrac{4x-8}{2} = 2x - 4$

$y = 1 - 3x$

$2x - 4 = 1 - 3x \longrightarrow 2x + 3x = 1 + 4$

$5x = 5 \longrightarrow x = \dfrac{5}{5} = 1$

$y = 2 \cdot 1 - 4 = -2$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array}}$$

○ MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS Y MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

En este apartado mostramos cómo se pueden generalizar a sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas los métodos de sustitución y reducción repasados en el apartado anterior.

$$(2) \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ -x + 2y + z = -2. \end{cases}$$

Resolvámoslo por el método de sustitución. La idea básica sigue siendo la misma: despejamos una de las incógnitas en una de las tres ecuaciones y sustituimos lo obtenido en las otras dos.

$$Resolvemos: \begin{cases} 1)\; x + y + z = 0 \\ 2)\; 2x + y - z = 3 \\ 3)\; -x + 2y + z = -2. \end{cases}$$

$x + y + z = 0 \longrightarrow x = -y - z$

2) $2(-y-z) + y - z = 3$

$-2y - 2z + y - z = 3 \longrightarrow -y - 3z = 3$

3) $-(-y-z) + 2y + z = 2$

$+y + z + 2y + z = -2 \longrightarrow 3y + 2z = -2$

$\ast$

$$\left.\begin{aligned} -y - 3z &= 3 \\ 3y + 2z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -y - 3z &= 3 \\ 3y + 2z &= -2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow y = -3z - 3$$

$$3(-3z - 3) + 2z = -2$$

$$-9z - 9 + 2z = -2 \longrightarrow -9z + 2z = -2 + 9$$

$$-7z = 7$$

$$z = \frac{-7}{7} = -1$$

* $z = -1$
* $y = -3(-1) - 3 = 0$
* $x = -y - z = 0 - (-1) = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= -1 \end{aligned}}$$

$$\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ (1, 0, -1) \end{array}$$

ADEFACIL

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ 2x + y - z = 3 & (2) \\ -x + 2y + z = -2 & (3) \end{cases} \xrightarrow{F2 - 2F1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 3z = 3 \\ -x + 2y + z = -2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & 2x + y - z = 3 \\ - & 2x + 2y + 2z = 0 \\ \hline & \cancel{} \ -y - 3z = 3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{F3 + F1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 3z = 3 \\ 3y + 2z = -2 \end{cases} \xrightarrow{F3 + 3F2} \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -y - 3z = 3 \\ -7z = 7 \end{array}} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & -x + 2y + z = -2 \\ + & x + y + z = 0 \\ \hline & \cancel{} \ 3y + 2z = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 3y + 2z = -2 \\ + & -3y - 9z = 9 \\ \hline & \cancel{} \ -7z = 7 \end{array}$$

3ª) $-7z = 7 \longrightarrow z = \frac{7}{-7} = -1$

2ª) $-y - 3(-1) = 3 \longrightarrow y = 3 - 3 = 0$

1ª) $x + 0 + (-1) = 0 \longrightarrow x = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}}$$

$(1, 0, -1)$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 3z = 3 \\ -7z = 7 \end{cases} \xrightarrow{-\frac{1}{7}F3} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 3z = 3 \\ z = -1 \end{cases} \xrightarrow{F2 + 3F3} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$+\frac{1}{\cancel{7}}(+\cancel{7})z = -\frac{1}{\cancel{7}}\cancel{7}$

$$\begin{array}{l} -y - 3z = 3 \\ \quad\ \ 3z = -3 \\ \hline -y \ \cancel{} = 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{F1 - F2 - F3} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ \ \ -y \quad\ \ = 0 \\ \quad\ \ -z = +1 \\ \hline x \ \cancel{} \ \cancel{} = 1 \end{array}$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos por reducción o eliminación el siguiente sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} \phantom{x_1 +{}} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[F1-F3]{} \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right. \xrightarrow[F3-2F2]{}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_3 &= -2 \end{aligned}\right.$$

$x_1 = 2 - \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_3 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3/2 \\ x_3 &= -1/2 \end{aligned}}$$

$(1, 3/2, -1/2)$

GAUSS

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_3 &= -2 \end{aligned}\right. \xrightarrow[\frac{F3}{4}]{} \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ x_3 &= -1/2 \end{aligned}\right. \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F2+F3]{} \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 &= 3/2 \\ x_3 &= -1/2 \end{aligned}\right. \xrightarrow[F1-F2-F3]{} \left\{\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3/2 \\ x_3 &= -1/2 \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3/2 \\ x_3 &= -1/2 \end{aligned}}$$

$(1, 3/2, -1/2)$ GAUSS – JORDAN