2.1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El capítulo tiene como análisis el estudio y resolución la ecuación de primer orden. En particular, estudiaremos 3 casos muy importantes:

- Separación de variables
- Ecuaciones exactas y reducibles a ellas
- Ecuaciones lineales.

2.2 ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES. ECUACIONES HOMOGÉNEAS.

Nuestro objetivo es resolver:

$$y' = f(x, y) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = h(y) \cdot g(x)$$

Utilizaremos el método de separación de variables cuando la función $f(x, y)$ pueda expresarse como producto de dos funciones, cada una dependiente de una variable, es decir:

$$f(x, y) = h(y) \cdot g(x)$$

De esta forma, la ecuación original podrá expresarse:

$$\boxed{h(y) \cdot dy = g(x) \cdot dx}$$

Para obtener la SOLUCIÓN GENERAL integramos a ambos lados:

$$\int h(y) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx + C$$

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

Ejemplo: Resolver la EDO $dx + e^{3x} \cdot dy = 0$ $\rightarrow e^{3x} dy = -dx$

$\rightarrow dy = \frac{-1}{e^{3x}} \cdot dx \longrightarrow \int dy = \int \frac{-1}{e^{3x}} dx$

$y = \int -e^{-3x} \cdot dx = \frac{1}{3}\int -3e^{-3x} dx \rightarrow y = \frac{1}{3}e^{-3x} + C$

$y = y(x)$

Ejemplo: Resolver la EDO $y' = (1 + x)^2$ $\left(y' = f(x, y) \right)$

$\frac{dy}{dx} = (1+x)^2 \rightarrow dy = (1+x)^2 dx \longrightarrow$

$\int dy = \int (1+x)^2 dx \longrightarrow \boxed{y = \frac{(1+x)^3}{3} + C}$

Algunas EDO no son de variables separable, pero mediante **CAMBIOS DE VARIABLE** se convierten, es el caso de las **ecuaciones homogéneas**:

¿Qué es una función homogénea? $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x,y) \Rightarrow$$ grado de la homogénea es n

Algunos ejemplos:

$$f(x,y) = x^3 - 2yx^2 + 5xy^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - 2\lambda y \cdot (\lambda x)^2 + 5\lambda x \cdot (\lambda y)^2 =$$

$$= \lambda^3 x^3 - 2\lambda y \cdot \lambda^2 x^2 + 5\lambda x \cdot \lambda^2 y^2 = \lambda^3 [x^3 - 2yx^2 + 5xy^2]$$

$$f(x,y) = 3x^2y - y^2\sqrt{x^2 + 2y^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3 \cdot (\lambda x)^2 \cdot \lambda y - \lambda^2 y^2 \cdot \sqrt{(\lambda x)^2 + 2(\lambda y)^2}$$

$$= 3\lambda^2 \cdot x^2 \cdot \lambda y - \lambda^2 y^2 \cdot \sqrt{\lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 y^2} = 3\lambda^3 \cdot x^2 y - \lambda^2 y^2 \underbrace{\sqrt{\lambda^2 (x^2 + 2y^2)}}_{\sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{x^2 + 2y^2}}$$

$$= \lambda^3 [3x^2y - y^2\sqrt{x^2 + 2y^2}]$$

Ecuaciones homogéneas de primer orden: La ecuación $\boxed{y' = f(x,y)}$ es homogénea si $f(x,y)$ es <u>HOMOGÉNEA DE GRADO 0</u>:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y) = f(x,y)$$

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

Y se debe resolver usando el cambio de variable:

$$\boxed{y = ux \rightarrow y' = u'x + u} \leftrightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Si la ecuación la tenemos en la forma:

$$\boxed{P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0}$$

Será homogénea si P y Q son homogéneas del mismo grado.

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$$

Ejemplos: Comprobar que la ecuación $\overset{P}{2xy} \cdot dx - \overset{Q}{(3x^2 - y^2)}dy = 0$ es homogénea. Resolverla usando el cambio de variable adecuado.

$$P = 2xy \Rightarrow P(\lambda x, \lambda y) = 2 \cdot \lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2\, 2xy \rightarrow 2$$

$$Q = -(3x^2 - y^2) \Rightarrow Q(\lambda x, \lambda y) = -(3\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2) = \lambda^2 \cdot -(3x^2 - y^2) \rightarrow 2$$

$$y = ux \rightarrow y' = u'x + u \rightarrow y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

$$u'x + u = \frac{2x \cdot ux}{3x^2 - (ux)^2} = \frac{2ux^2}{3x^2 - u^2x^2} = \frac{2u\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(3-u^2)} = \frac{2u}{3-u^2}$$

$$u'x = \frac{2u}{3-u^2} - u = \frac{2u - 3u + u^3}{3-u^2}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{-u + u^3}{3-u^2} \Rightarrow \boxed{\frac{3-u^2}{u^3-u}du = \frac{dx}{x}}$$

racional

$$\int \frac{3-u^2}{\underbrace{u^3-u}_{u(u^2-1)}}\,du = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{3-u^2}{u(u-1)(u+1)}\,du$$

$$= \int \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1}\right) du = \int \frac{A(u-1)(u+1) + B\cdot u(u+1) + C u(u-1)}{u(u-1)(u+1)}\,du$$

$$3-u^2 = A(u-1)(u+1) + B\cdot u(u+1) + C u(u-1)$$

$\underline{u=0}$ $\quad 3 = -A \Rightarrow A = -3$

$\underline{u=1}$ $\quad 2 = 2B \Rightarrow B = 1$

$\underline{u=-1}$ $\quad 2 = 2C \Rightarrow C = 1$

$$\int \left(\frac{-3}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}\right)\cdot du$$

$$\Rightarrow -3\ln u + \ln(u-1) + \ln(u+1)$$

$\ln K$ $\qquad u = y/x$

$$-3\ln u + \underbrace{\ln(u-1) + \ln(u+1)}_{} = \ln x + \tilde{C}$$

$-\ln u^3$

$$\ln \frac{(u-1)(u+1)}{u^3} = \ln Kx \Rightarrow \left[\frac{u^2-1}{u^3} = Kx\right]$$

$$\frac{y^2/x^2 - 1}{y^3/x^3} = Kx \rightarrow \frac{\frac{y^2-x^2}{\cancel{x^2}}}{y^3/\cancel{x^3}} = K\cancel{x} \Rightarrow \frac{y^2-x^2}{y^3} = K \Rightarrow \boxed{y^2-x^2 = K\cdot y^3}$$

Existen más ecuaciones que con el cambio de variable adecuado se convierten en variable separadas:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \to y' = \frac{-x+2y+3}{2x-y+7}$$

En este caso existen dos posibilidades:

Rectas no paralelas: $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b1} \to$ deberemos hacer los cambios de variable:

$$\boxed{x = u + \alpha; y = v + \beta}$$

Donde (α, β) es el punto de corte de las rectas.

Rectas paralelas: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b1} = k \to$ La ecuación queda de la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$

Y se resuelve con el cambio de variable $z = a_1x + b_1y$

Resolver la ecuación: $y' = \frac{2y-1}{y+x} \to \left.\begin{array}{l} 2y-1=0 \\ \to y+x=0 \end{array}\right\}$ NO PARALELAS

$2y-1=0 \Rightarrow y = 1/2 \to 1/2 + x = 0 \Rightarrow x = -1/2$

Pto. de corte $\Rightarrow (-1/2, 1/2) \to x = u - 1/2$

$y = v + 1/2$

$y' = v'$

$$y' = \frac{2y-1}{y+x} \Rightarrow v' = \frac{2\cdot(v+1/2)-1}{r+1/2+u-1/2} = \frac{2v+1-1}{r+u}$$

$$r' = \frac{2r}{r+u} \Rightarrow r = t\cdot u \rightarrow r' = t'u + t$$

$(y = ux)$

$$t'u + t = \frac{2t\cdot u}{2tu+u} = \frac{2t\cancel{u}}{\cancel{u}(2t+1)} \Rightarrow t'u = \frac{2t}{2t+1} - t$$

$$t'u = \frac{2t-2t^2-t}{2t+1} \Rightarrow \frac{dt}{du} = \frac{-2t^2+t}{2t+1}$$

$$\frac{2t+1}{-2t^2+t}\cdot dt = du \rightarrow \int \frac{2t+1}{\underbrace{-2t^2+t}_{t(-2+t)}}\cdot dt = \int du$$

$$\int\left[\frac{A}{t} + \frac{B}{t-2}\right]dt = \int \frac{A(t-2)+Bt}{t(t-2)}dt \rightarrow 2t+1 = A(t-2)+Bt$$

$\underline{t=0}$ $\quad 1 = -2A \Rightarrow A = -1/2$

$\underline{t=2}$ $\quad 5 = 2B \Rightarrow B = 5/2$

$$-\tfrac{1}{2}\ln t + 5\ln(t-2) = \ln u + \underbrace{C}_{\ln K}$$

$$\ln\frac{(t-2)^5}{t^{1/2}} = \ln Ku \Rightarrow \frac{(t-2)^5}{t^{1/2}} = K\cdot u \Rightarrow$$ Deshacer cambios de variable

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

2.3 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS. FACTORES INTEGRANTES.

Decimos que la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es exacta si las funciones P y Q son el Gradiente de una función $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y); \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

$F(x,y) = C$ es la solución general y F se denomina función potencial de P y Q

Existencia de la función potencial

Sean P y Q dos funciones reales definidas y de clase 2 (C^2) en un recinto convexo de $\mathbb{R}^2$. La condición necesaria y suficiente para que (P,Q) sea el gradiente de una función F es que se cumpla:

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$$

¿Cómo la resolvemos? Los pasos a seguir son siempre los mismos:

a) Se integra $P(x,y)$ respecto de x

$$F(x,y) = \int P(x,y) \cdot dx + k(y)$$

b) Se calcula $k(y)$ derivando respecto de y la igualdad anterior, entonces

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y) \cdot dx\right) + k'(y) \rightarrow k'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y) \cdot dx\right)$$

c) Se sustituye $k(y)$ en la igualdad de a).

Ejemplo: Comprobar que la EDO $\underbrace{(x - y^3 + y^2 senx)}_{P}dx - \underbrace{(3xy^2 + 2ycosx)}_{Q}dy = 0$ es exacta. Resolverla.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 + 2y\,senx \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -(3y^2 - 2y\,senx) = -3y^2 + 2y\,senx \end{array}\right\} \Rightarrow \text{exacta}$$

$$F(x,y) = \int (x - y^3 + y^2 senx)\cdot dx + K(y) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - y^3x - y^2cosx + K(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \underbrace{-3y^2x}\,\underbrace{-2ycosx} + K'(y) = \underbrace{-3xy^2}\,\underbrace{-2ycosx}$$

$$K'(y) = 0 \rightarrow \boxed{K(y) = D}$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} - y^3x - y^2cosx + D = C$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} - y^3x - y^2cosx = K}$$

Ejemplo con parámetros: ¿Qué valores de los parámetros α, β hacen que la siguiente EDO sea exacta? Resolverla en ese caso

$$3x^2y\frac{dx}{dy} = 1 + \beta y - x^\alpha$$

$$3x^2y\,dx = (1+\beta y - x^\alpha)\cdot dy \rightarrow \underbrace{(1+\beta y - x^\alpha)}_{Q}dy \underbrace{- 3x^2y}_{P}dx = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{array}\right\} -3x^2 = -\alpha \cdot x^{\alpha-1} \rightarrow \alpha = 3$$

$$\forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$F(x,y) = \int -3x^2y\cdot dx + K(y) = -\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}y + K(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\cancel{x^3} + K'(y) = 1 + \beta y - \cancel{x^3} \Rightarrow K'(y) = 1 + \beta y$$

$$K(y) = \int (1+\beta y)\cdot dy = y + \beta\frac{y^2}{2} = K(y)$$

$$F(x,y) = y + \beta\cdot\frac{y^2}{2} - x^3 y = C$$

$$\forall \beta \in \mathbb{R}$$

Factor integrante y su existencia

¿Qué podemos hacer si una EDO no es exacta? Es decir:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

En estos casos, vamos a tratar de convertirla en exacta mediante la búsqueda de un factor integrante.

$$\rightarrow \quad \mu(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0$$

con μ: factor integrante

Tenemos que:

$$\mu(x,y) \cdot P(x,y) \rightarrow \frac{\partial[\mu(x,y) \cdot P(x,y)]}{\partial y} = \mu_y \cdot P + \mu \cdot P_y$$

$$\mu(x,y) \cdot Q(x,y) \rightarrow \frac{\partial[\mu(x,y) \cdot Q(x,y)]}{\partial x} = \mu_x \cdot Q + \mu \cdot Q_x$$

Igualamos las expresiones:

$$\mu_y \cdot P + \mu \cdot P_y = \mu_x \cdot Q + \mu \cdot Q_x \rightarrow$$

$$\boxed{\mu(P_y - Q_x) = \mu_x \cdot Q - \mu_y \cdot P}$$

Existen 3 casos:

- μ solo depende de $x \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$
- μ solo depende de $y \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{M_y - N_x}{M}$
- μ depende de ambas* $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y}$ $\rightarrow$

cambio de variable $z = z(x,y)$

Ejemplo: Resolver la EDO: $\underbrace{\cos(x)}_{P}\, dx + \underbrace{\left(1+\frac{2}{y}\right) sen(x)}_{Q} dy = 0\ con\ \mu(y)$

$$\frac{\partial P}{\partial \cancel{x}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (1 + 2/y) \cdot \cos x \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\mu(x,y) \cdot P(x,y) \rightarrow \frac{\partial[\mu(x,y) \cdot P]}{\partial y} = \mu_y \cdot P + \mu \cdot 0$$

$$\mu(x,y) \cdot Q \rightarrow \frac{\partial[\mu(x,y) \cdot Q]}{\partial x} = \mu_x \cdot Q + \mu \cdot (1 + 2/y) \cdot \cos x$$

$\mu(y) \Rightarrow \mu_x = 0$

$$\mu_y \cdot P + 0 = \cancel{\mu_x} \cdot Q + \mu(1 + 2/y) \cdot \cos \rightarrow$$

$$\mu_y \cdot \cancel{\cos x} = \mu \cdot (1 + 2/y) \cancel{\cos x}$$

$$\frac{d\mu}{dy} = \mu\,(1 + 2/y) \rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = (1 + 2/y) \cdot dy$$

$$\ln\mu = y + 2\ln y = y + \ln y^2 = \underbrace{\ln e^y} + \ln y^2 = \ln e^y \cdot y^2$$

$$\boxed{\mu = e^y \cdot y^2}$$

$$\underbrace{e^y \cdot y^2}_{\mu} \cdot \cos x \cdot dx + (1 + 2/y) \cdot \operatorname{sen} x \cdot \underbrace{e^y \cdot y^2}_{\mu} \cdot dy = 0$$

$$F(x,y) = \int e^y \cdot y^2 \cdot \cos x \cdot dx + K(y) = \boxed{e^y \cdot y^2 \cdot \operatorname{sen}(x) + K(y)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y \cdot y^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2e^y y \cdot \operatorname{sen}(x) + K'(y) \rightarrow$$

$$\underbrace{e^y \cdot y^2 \cdot \operatorname{sen} x} + \underbrace{2e^y y^2 \cdot \operatorname{sen} x} + K'(y) = (1 + 2/y) \operatorname{sen} x\, e^y \cdot y^2$$

$$= \underbrace{\operatorname{sen} x\, e^y y^2} + \underbrace{2 \operatorname{Sen} x\, e^y y}$$

$$K'(y) = 0 \rightarrow K(y) = D$$

$$\rightarrow \boxed{F(x,y) = e^y \cdot y^2 \cdot \operatorname{sen}(x) = C}$$

2.4 LA ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

La ecuación lineal de primer orden tiene la forma:

$$\boxed{y' + f(x)y + g(x) = 0}$$

Cuya solución general es:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[C - \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right]}$$

Ejercicio 1: Resolver la ecuación diferencial lineal $x\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + 4y = x^3 - x$

$$x \cdot y' + 4y = x^3 - x$$

$$x \cdot y' + 4y - x^3 + x = 0 \rightarrow y' + \underbrace{\frac{4}{x}}_{f(x)}y \underbrace{- x^2 + 1}_{g(x)} = 0$$

$$y(x) = e^{-\int \frac{4}{x} \cdot dx} \cdot \left[C - \int (-x^2+1) \cdot e^{\int 4/x} \cdot dx\right]$$

$$= e^{-4\ln x} \cdot \left[C - \int (-x^2+1) \cdot e^{4\ln x} \cdot dx\right]$$

$$= e^{\ln x^{-4}} \left[C - \int (-x^2+1) \cdot e^{\ln x^4} \cdot dx\right]$$

$$x^{-4} \cdot \left[C - \int (-x^2+1) \cdot x^4 \cdot dx\right]$$

$$x^{-4}\cdot\left[C-\int(-x^{6}+x^{4})\cdot dx\right]=x^{-4}\cdot\left[C-\left(-\frac{x^{7}}{7}+\frac{x^{5}}{5}\right)\right]$$

Ejercicio 2: Resolver la EDO $y'+\frac{y}{x}+x^3=0$ $\rightarrow$ $y'+\underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}y+\underbrace{x^3}_{g(x)}=0$

$$y(x)=e^{-\int\frac{1}{x}\cdot dx}\cdot\left[C-\int x^3\cdot e^{\int\frac{1}{x}\cdot dx}\cdot dx\right]=$$

$$=e^{-\ln x}\cdot\left[C-\int x^3\cdot e^{\ln x}\cdot dx\right]=$$

$$=x^{-1}\cdot\left[C-\int \underbrace{x^3\cdot x}_{x^4}\cdot dx\right]=\boxed{x^{-1}\cdot\left[C-\frac{x^5}{5}\right]}$$

2.5 Ecuación de Bernouilli

Decimos que una ecuación es de Bernouilli si es de la forma

$$\boxed{y' + f(x)y + g(x)y^n = 0}$$

Donde f y g son continuas y $n > 1$. Podemos convertir la ecuación en una lineal si realizamos el cambio de variable:

$$z = \frac{1}{(1-n)y^{n-1}};\, z' = \frac{1}{y^n}y'$$

Si dividimos la ecuación original por y^n

$$\frac{1}{y^n}y' + f(x)\frac{1}{y^{n-1}} + g(x) = 0$$

Y realizando el cambio:

$$\boxed{z' + (1-n)f(x)z + g(x) = 0}$$

Ejercicio 1: Resolver la ecuación de Bernouilli $y' + 2xy - xy^2 = 0$

$\underline{n=2} \rightarrow z = -1/y \rightarrow z' = y'/y^2$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2x\cancel{y}}{y^{\cancel{2}}} - \frac{x\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = 0 \rightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{2x}{y} - x = 0$$

$$\boxed{z' \underbrace{-2x}_{f(x)} z \underbrace{-x}_{g(x)} = 0}$$

$$z(x) = e^{-\int -2x \cdot dx} \cdot \left[c - \int -x \cdot e^{\int -2x \cdot dx} \cdot dx \right]$$

$$= e^{x^2} \cdot \left[c - \frac{1}{2} \int \underbrace{-2x}_{} \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{} \cdot dx \right] =$$

$$= e^{x^2} \left[c - \frac{1}{2} e^{-x^2} \right] = \boxed{e^{x^2} c - 1/2}$$

$$z = -1/y \Rightarrow y = -1/z \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{-1}{e^{x^2} \cdot c - 1/2}}$$