## 3.1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

En este capítulo vamos a tener como objetivo el análisis y resolución de la EDO de orden n:

$$a_0 x_0 y^n + a_1 x^{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_n y = 0$$

Ecuación que aparece en muchos sistemas mecánicos: osciladores, circuitos RLC …

## 3.2 EL PROBLEMA DE CAUCHY

Podemos describir una ecuación de orden n como:

$$F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0$$

Si despejamos el orden n:

$$y^n = f(y, y', \ldots, y^{n-1})$$

Al igual que con la EDO de orden 1, ¿podemos asegurar la existencia y unicidad de una función que cumpla?

$$y_0 = y(x_0); y_1 = y'(x_0); \ldots; y_{n-1} = y^{n-1}(x_0)$$

<u>Teorema de existencia y unicidad</u>

Podemos asegurar que existe una única solución $y = \varphi(x)$ si:

a) $f$ es continua en su dominio de definición

b) $f$ posee derivadas parciales (respecto de la V.D) continuas

La solución general dependerá de $n$ parámetros:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Ejemplo: Comprueba que $y = C_2 e^{C_1 x}$ es solución general del siguiente problema de Cauchy:

$$y'' = \frac{y'^2}{y}; y(0) = 1; y'(0) = 1$$

## 3.3 MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

Existen algunos casos particulares en los que las EDOs de orden n tienen una rápida solución, estudiaremos algunos casos:

### Ecuaciones de la forma: $y^n = f(x)$

Integraremos n veces hasta llegar a y. Por cada integral que hagamos aparecerá un constante de integración:

Ejemplo: $x^3 y''' = 1 \Rightarrow$

## Ecuaciones que no contienen la variable independiente $F(y, y', y'', \dots, y^n) = 0$

Realizando el cambio de variable $y' = \frac{dy}{dx} = p$ conseguimos bajar un orden la EDO ya que:

$$y' = p \rightarrow y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

Es útil cuando la ecuación es de segundo orden ya que generalmente obtenemos una ecuación de primer orden en variable separadas.

Ejemplo: $yy'' - (y')^2 = 0$

## Ecuaciones que no contienen a la función ni a sus derivadas hasta el orden m-1 inclusive

$$F(x, y^m, \dots, y^n) = 0$$

Realizando el cambio de variable $y^m = p$ se reduce la ecuación diferencial hasta el orden $n - m$

Ejemplo: $(y'')^2 + (y''')^2 = 1$

## 3.4 LA ECUACIÓN LINEAL. EL OPERADOR DIFERENCIAL LINEAL

El caso más importante de estudio es la ecuación lineal, la cual definimos como:

Una ecuación diferencial de orden n es lineal si lo es respecto a la función y a todas sus derivadas, es decir, su forma es la de un polinomio de grado uno. Su expresión general es:

$$\boxed{\frac{d^n y}{dx^n} + h_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + h_n(x)y = F(x)}$$

SI $F(x) = 0$ diremos que es homogénea.

## El operador diferencial lineal

La derivada $\frac{d}{dx}$ es un operador que aplica sobre una función (derivable) y le hace corresponder su derivada. Por conveniencia, podemos llamar a ese operador $D$ y considerar los operadores $h(x)D^n$. Con esto, podemos formar el operador $L(y)$ tal que:

$$L(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + h_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + h_n(x)y$$

Y empleando la notación $D$:

$$L(y) = (D^n + h_1(x)D^{n-1} + \cdots + h_n(x)D^0)y$$

Acortando y compactando la notación, de esta forma, las ecuaciones se pueden expresar:

Completa: $L(y) = F(x)$

Homogénea: $L(y) = 0$

Donde $L(y)$ es el operador diferencial lineal y $H(D)$ es el polinomio operacional:

$$\boxed{L(y) = H(D)(y)}$$

Ejemplos:

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$$

$$-x^5y'''' + \frac{3}{x}y'' + \ln(x)\,y' - 2y = e^{-x^2}$$

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

## 3.5 Teoría Fundamental de las ecuaciones lineales

*Una familia de funciones reales* $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$ *definidas en un intervalo (a, b) de números reales se dice que es* ***linealmente dependientes*** *si existen p constantes* $c_1, c_2, \dots, c_p$ *no todas nulas tales que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_p f_p(x) = 0 \text{ para todo } x \in (a, b)$$

*Si no, decimos que son* ***linealmente independientes***

Ejemplos:

- $f_1(x) = x^2, f_2(x) = -3x^2 \text{ en } (2, 5)$

- $f_1(x) = x, f_2(x) = sen(x) \text{ en } (-\pi, \pi)$

**Combinación lineal de soluciones de una ecuación homogénea**

*Toda combinación lineal, con coeficientes constantes, de soluciones de una ecuación lineal homogénea es también solución de ella.*

Es decir, si $y_1, \dots, y_n$ son $n$ soluciones de la ecuación lineal homogénea $L(y) = 0 \; en \; (a, b)$ se tiene que cumplir:

$$L(y_1) = 0, L(y_2) = 0, \dots., L(y_n) = 0$$

Una combinación lineal suya, $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n$ cumplirá:

$$L(y) = L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n) = 0$$

**Si la ecuación lineal homogénea $L(y) = 0$ con coeficientes reales tiene una solución compleja, la parte real de la misma y su parte imaginaria, por separado, son también soluciones de dicha ecuación*

*¿Existe alguna forma más simple de saber si una familia de funciones es linealmente dependiente o independiente?*

## *Wronskiano*

Sea $F$ una familia de funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ definidas y derivables hasta el orden n-1

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**Si es 0 son linealmente dependientes**

**Si es distinto de 0 son linealmente independientes**

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

**Espacio de soluciones de la ecuación lineal homogénea**

Se llama sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n en (a, b) de $\mathbb{R}$ al conjunto de n soluciones cualesquiera linealmente independientes.

**Solución general de la ecuación homogénea**

Si $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y^n + h_1(x)y^{n-1} + \cdots + h_n(x)y = 0$$

Con $h_i(x)$ continuos.

La expresión (combinación lineal del sistema fundamental)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

Para los distintos valores de $C_i$ contiene todas las soluciones de la ecuación, y se llama **SOLUCIÓN GENERAL.**

Teniendo el sistema fundamental podemos averiguar de que ecuación lineal homogénea es solución

Ejemplo: $\{1, e^x\}$

**Expresión general del conjunto de soluciones de la ecuación lineal completa**

Dada la ecuación $L(y) = F(x)$ donde los coeficientes y $F(x)$ son continuas en un intervalo (a,b). Si $y_1(x)$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada y $v(x)$ lo es de la ecuación completa, se cumple que:

$$y(x) = y_1(x) + v(x)$$

Es solución de la ecuación completa. Además, se cumple el **Principio de superposición.**

***"La solución general de la ecuación completa $L(y) = F(x)$ es la suma de una solución particular suya más la solución general de la ecuación homogénea asociada"***

$$y(x) = y_H + y_p = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + y_p$$

Ejemplo: Demostrar que la familia de soluciones $y = c_1 x + c_2 x^2 + 2x^2 e^x - 4xe^x$

es la solución general de $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4 e^x \ \ en\ \Omega = (0, \infty)$

**Reducción de orden de la ecuación lineal homogénea**

Conociendo una solución particular de la ecuación y mediante un cambio de variable podremos reducir el orden de la ecuación lineal homogénea.

Si $y_1(x)$ es una solución particular de $y^n + h_1(x)y^{n-1} + \cdots + h_n(x)y = 0$ entonces el cambio de variable:

$$y = y_1(x) \cdot v(x)$$

Transforma la ecuación en una lineal homogénea de orden n-1

Ejemplo: $y = x$ es solución particular de $xy'' - xy' + y = 0$