

### 3.1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

En este capítulo vamos a tener como objetivo el análisis y resolución de la EDO de orden  $n$ :

$$a_0x_0y^n + a_1x^{n-1}y^{n-1} + \dots + a_ny = 0$$

Ecuación que aparece en muchos sistemas mecánicos: osciladores, circuitos RLC ...

### 3.2 EL PROBLEMA DE CAUCHY

Podemos describir una ecuación de orden  $n$  como:

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$$

Si despejamos el orden  $n$ :

$$y^n = f(y, y', \dots, y^{n-1})$$

Al igual que con la EDO de orden 1, ¿podemos asegurar la existencia y unicidad de una función que cumpla?

$$y_0 = y(x_0); y_1 = y'(x_0); \dots; y_{n-1} = y^{n-1}(x_0)$$

#### Teorema de existencia y unicidad

Podemos asegurar que existe una única solución  $y = \varphi(x)$  si:

- $f$  es continua en su dominio de definición
- $f$  posee derivadas parciales (respecto de la V.D) continuas

La solución general dependerá de  $n$  parámetros:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$



Ejemplo: Comprueba que  $y = C_2 e^{C_1 x}$  es solución general del siguiente problema de Cauchy:

$$y'' = \frac{y'^2}{y}; y(0) = 1; y'(0) = 1$$



### 3.3 MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

Existen algunos casos particulares en los que las EDOs de orden  $n$  tienen una rápida solución, estudiaremos algunos casos:

#### Ecuaciones de la forma: $y^n = f(x)$

Integraremos  $n$  veces hasta llegar a  $y$ . Por cada integral que hagamos aparecerá un constante de integración:

Ejemplo:  $x^3 y''' = 1 \Rightarrow$



## Ecuaciones que no contienen la variable independiente

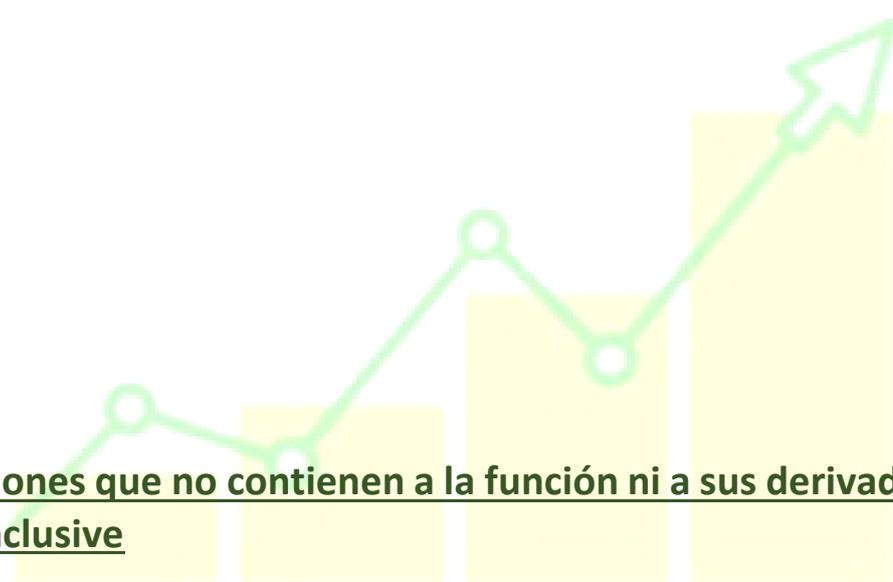
$$F(y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Realizando el cambio de variable  $y' = \frac{dy}{dx} = p$  conseguimos bajar un orden la EDO ya que:

$$y' = p \rightarrow y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

Es útil cuando la ecuación es de segundo orden ya que generalmente obtenemos una ecuación de primer orden en variable separadas.

Ejemplo:  $yy'' - (y')^2 = 0$



## Ecuaciones que no contienen a la función ni a sus derivadas hasta el orden m-1 inclusive

$$F(x, y^m, \dots, y^n) = 0$$

Realizando el cambio de variable  $y^m = p$  se reduce la ecuación diferencial hasta el orden  $n - m$

Ejemplo:  $(y'')^2 + (y''')^2 = 1$

### 3.4 LA ECUACIÓN LINEAL. EL OPERADOR DIFERENCIAL LINEAL

El caso más importante de estudio es la ecuación lineal, la cual definimos como:

Una ecuación diferencial de orden  $n$  es lineal si lo es respecto a la función y a todas sus derivadas, es decir, su forma es la de un polinomio de grado uno. Su expresión general es:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + h_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + h_n(x) y = F(x)$$

Si  $F(x) = 0$  diremos que es homogénea.

## El operador diferencial lineal

La derivada  $\frac{d}{dx}$  es un operador que aplica sobre una función (derivable) y le hace corresponder su derivada. Por conveniencia, podemos llamar a ese operador  $\underline{D}$  y considerar los operadores  $h(x)D^n$ . Con esto, podemos formar el operador  $L(y)$  tal que:

$$L(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + h_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + h_n(x)y$$

Y empleando la notación  $D$ :

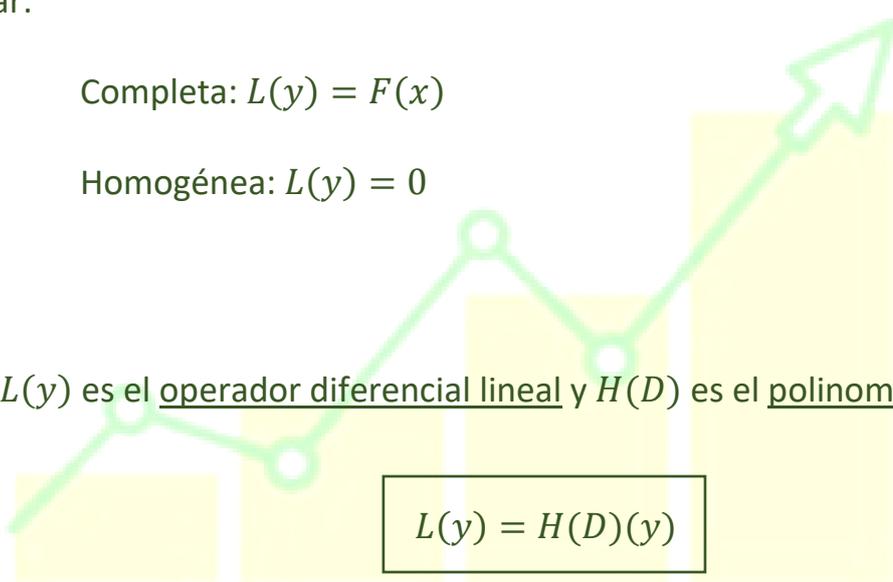
$$L(y) = (D^n + h_1(x)D^{n-1} + \dots + h_n(x)D^0)y$$

Acortando y compactando la notación, de esta forma, las ecuaciones se pueden expresar:

Completa:  $L(y) = F(x)$

Homogénea:  $L(y) = 0$

Donde  $L(y)$  es el operador diferencial lineal y  $H(D)$  es el polinomio operacional:


$$L(y) = H(D)(y)$$

Ejemplos:

$$x^3 y'''' - 3x^2 y''' + 6xy' - 6y = 0$$

$$-x^5 y'''' + \frac{3}{x} y'' + \ln(x) y' - 2y = e^{-x^2}$$

### 3.5 Teoría Fundamental de las ecuaciones lineales

Una familia de funciones reales  $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$  definidas en un intervalo  $(a, b)$  de números reales se dice que es **linealmente dependientes** si existen  $p$  constantes  $c_1, c_2, \dots, c_p$  no todas nulas tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_p f_p(x) = 0 \text{ para todo } x \in (a, b)$$

Si no, decimos que son **linealmente independientes**

Ejemplos:

- $f_1(x) = x^2, f_2(x) = -3x^2$  en  $(2, 5)$

- $f_1(x) = x, f_2(x) = \text{sen}(x)$  en  $(-\pi, \pi)$

## Combinación lineal de soluciones de una ecuación homogénea

*Toda combinación lineal, con coeficientes constantes, de soluciones de una ecuación lineal homogénea es también solución de ella.*

Es decir, si  $y_1, \dots, y_n$  son  $n$  soluciones de la ecuación lineal homogénea  $L(y) = 0$  en  $(a, b)$  se tiene que cumplir:

$$L(y_1) = 0, L(y_2) = 0, \dots, L(y_n) = 0$$

Una combinación lineal suya,  $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n$  cumplirá:

$$L(y) = L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n) = 0$$

*\*Si la ecuación lineal homogénea  $L(y) = 0$  con coeficientes reales tiene una solución compleja, la parte real de la misma y su parte imaginaria, por separado, son también soluciones de dicha ecuación*

*¿Existe alguna forma más simple de saber si una familia de funciones es linealmente dependiente o independiente?*

## **Wronskiano**

Sea  $F$  una familia de funciones  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  definidas y derivables hasta el orden  $n-1$

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Si es 0 son linealmente dependientes

Si es distinto de 0 son linealmente independientes



## Espacio de soluciones de la ecuación lineal homogénea

Se llama sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden  $n$  en  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}$  al conjunto de  $n$  soluciones cualesquiera linealmente independientes.

## Solución general de la ecuación homogénea

Si  $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y^n + h_1(x)y^{n-1} + \dots + h_n(x)y = 0$$

Con  $h_i(x)$  continuos.

La expresión (combinación lineal del sistema fundamental)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$$

Para los distintos valores de  $C_i$  contiene todas las soluciones de la ecuación, y se llama **SOLUCIÓN GENERAL**.

Teniendo el sistema fundamental podemos averiguar de que ecuación lineal homogénea es solución

Ejemplo:  $\{1, e^x\}$

### Expresión general del conjunto de soluciones de la ecuación lineal completa

Dada la ecuación  $L(y) = F(x)$  donde los coeficientes y  $F(x)$  son continuas en un intervalo  $(a,b)$ . Si  $y_1(x)$  es una solución particular de la ecuación homogénea asociada y  $v(x)$  lo es de la ecuación completa, se cumple que:

$$y(x) = y_1(x) + v(x)$$

Es solución de la ecuación completa. Además, se cumple el **Principio de superposición**.

***“La solución general de la ecuación completa  $L(y) = F(x)$  es la suma de una solución particular suya más la solución general de la ecuación homogénea asociada”***

$$y(x) = y_H + y_p = c_1y_1 + \dots + c_ny_n + y_p$$

Ejemplo: Demostrar que la familia de soluciones  $y = c_1x + c_2x^2 + 2x^2e^x - 4xe^x$

es la solución general de  $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4e^x$  en  $\Omega = (0, \infty)$



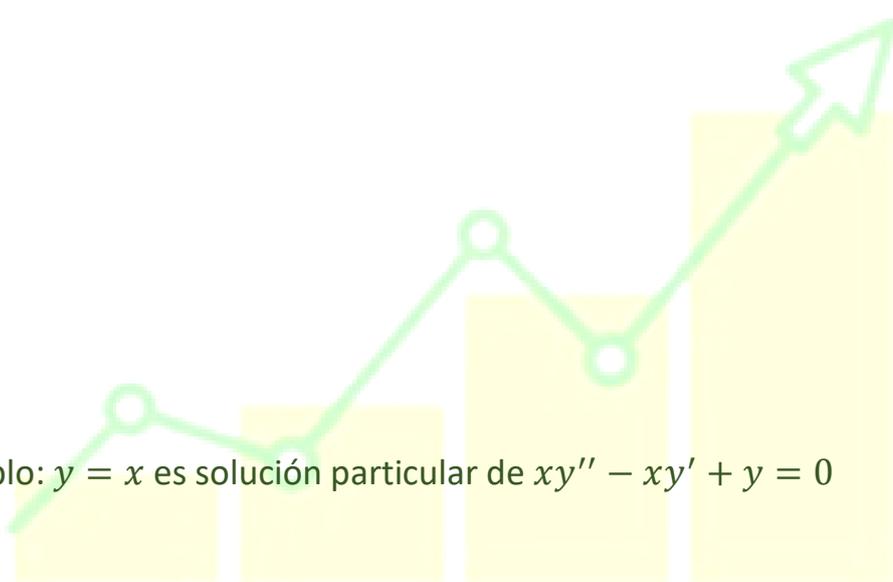
## Reducción de orden de la ecuación lineal homogénea

Conociendo una solución particular de la ecuación y mediante un cambio de variable podremos reducir el orden de la ecuación lineal homogénea.

Si  $y_1(x)$  es una solución particular de  $y^n + h_1(x)y^{n-1} + \dots + h_n(x)y = 0$  entonces el cambio de variable:

$$y = y_1(x) \cdot v(x)$$

Transforma la ecuación en una lineal homogénea de orden  $n-1$



Ejemplo:  $y = x$  es solución particular de  $xy'' - xy' + y = 0$