

## 2.1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El capítulo tiene como análisis el estudio y resolución la ecuación de primer orden. En particular, estudiaremos 3 casos muy importantes:

- Separación de variables
- Ecuaciones exactas y reducibles a ellas
- Ecuaciones lineales.

## 2.2 ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES. ECUACIONES HOMOGÉNEAS.

Nuestro objetivo es resolver:

$$y' = f(x, y)$$

Utilizaremos el método de separación de variables cuando la función  $f(x, y)$  pueda expresarse como producto de dos funciones, cada una dependiente de una variable, es decir:

$$f(x, y) = h(y) \cdot g(x)$$

De esta forma, la ecuación original podrá expresarse:

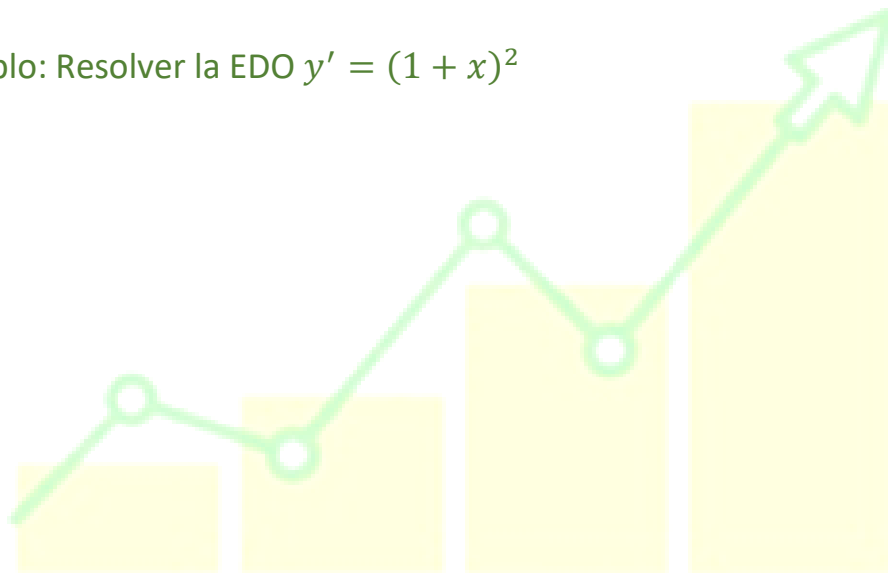
$$h(y) \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

Para obtener la SOLUCIÓN GENERAL integramos a ambos lados:

$$\int h(y) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx + C$$

Ejemplo: Resolver la EDO  $dx + e^{3x} \cdot dy = 0 \rightarrow$

Ejemplo: Resolver la EDO  $y' = (1 + x)^2$

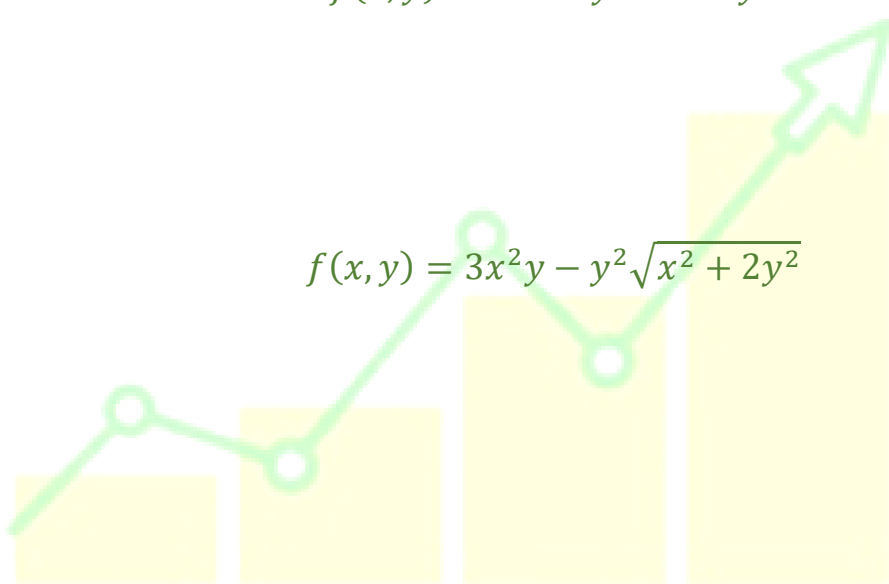


Algunas EDO no son de variables separable, pero mediante **CAMBIOS DE VARIABLE** se convierten, es el caso de las **ecuaciones homogéneas**:

¿Qué es una función homogénea?

Algunos ejemplos:

$$f(x, y) = x^3 - 2yx^2 + 5xy^2$$


$$f(x, y) = 3x^2y - y^2\sqrt{x^2 + 2y^2}$$

**Ecuaciones homogéneas de primer orden:** La ecuación  $y' = f(x, y)$  es homogénea si  $f(x, y)$  es HOMOGENEA DE GRADO 0:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y)$$

Y se debe resolver usando el cambio de variable:

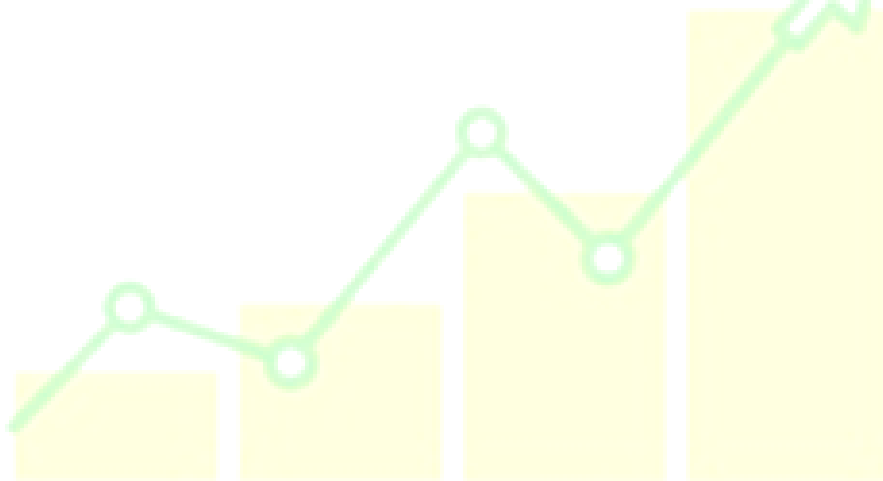
$$\boxed{y = ux \rightarrow y' = u'x + u} \leftrightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

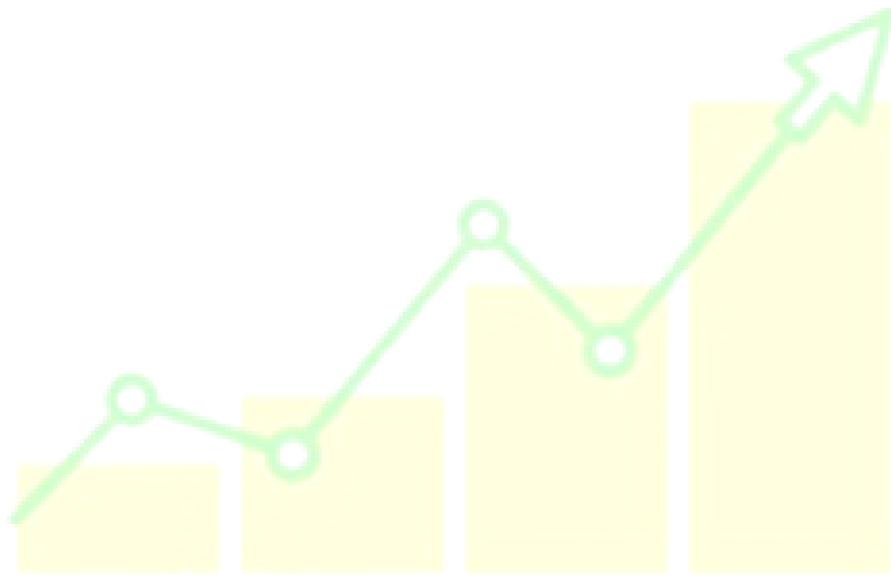
Si la ecuación la tenemos en la forma:

$$P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = 0$$

Será homogénea si  $P$  y  $Q$  son homogéneas del mismo grado.

Ejemplos: Comprobar que la ecuación  $2xy \cdot dx - (3x^2 - y^2)dy = 0$  es homogénea. Resolverla usando el cambio de variable adecuado.





Existen más ecuaciones que con el cambio de variable adecuado se convierten en variable separadas:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

En este caso existen dos posibilidades:

Rectas no paralelas:  $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1} \rightarrow$  deberemos hacer los cambios de variable:

$$x = u + \alpha; y = v + \beta$$

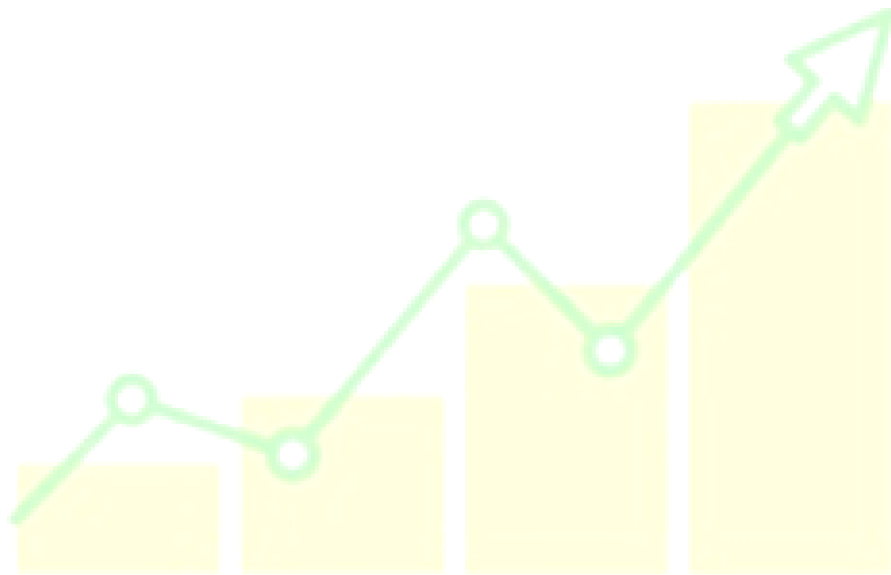
Donde  $(\alpha, \beta)$  es el punto de corte de las rectas.

Rectas paralelas:  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k \rightarrow$  La ecuación queda de la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$

Y se resuelve con el cambio de variable  $z = a_1x + b_1y$

Resolver la ecuación:  $y' = \frac{2y-1}{y+x}$



## 2.3 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS. FACTORES INTEGRANTES.

Decimos que la ecuación diferencial  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  es exacta si las funciones  $P$  y  $Q$  son el Gradiente de una función  $F(x, y)$ :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

$F(x, y) = C$  es la solución general y  $F$  se denomina función potencial de  $P$  y  $Q$

### Existencia de la función potencial

Sean  $P$  y  $Q$  dos funciones reales definidas y de clase 2 ( $C^2$ ) en un recinto convexo de  $\mathbb{R}^2$ . La condición necesaria y suficiente para que  $(P, Q)$  sea el gradiente de una función  $F$  es que se cumpla:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

¿Cómo la resolvemos? Los pasos a seguir son siempre los mismos:

a) Se integra  $P(x, y)$  respecto de  $x$

$$F(x, y) = \int P(x, y) \cdot dx + k(y)$$

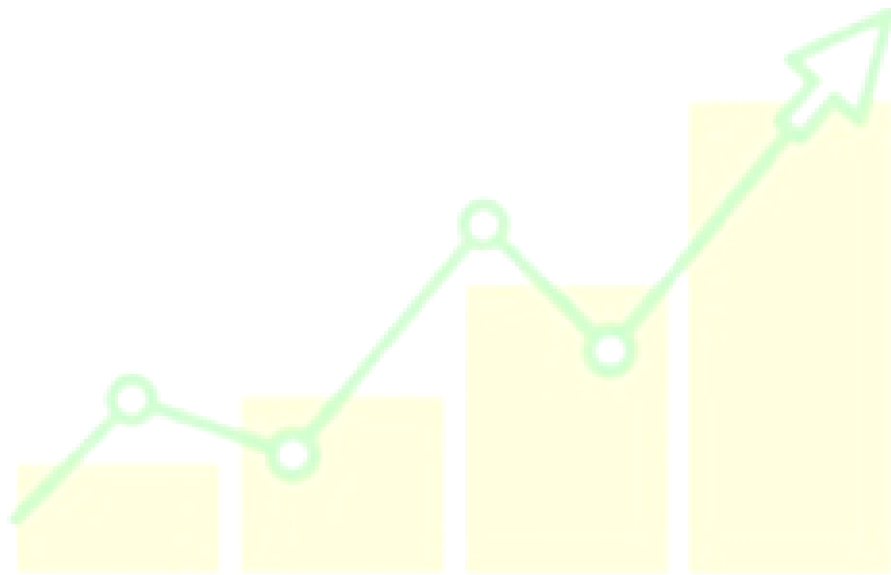
b) Se calcula  $k(y)$  derivando respecto de  $y$  la igualdad anterior, entonces

$$Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int P(x, y) \cdot dx \right) + k'(y) \rightarrow k'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int P(x, y) \cdot dx \right)$$

c) Se sustituye  $k(y)$  en la igualdad de a).



Ejemplo: Comprobar que la EDO  $(x - y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)dx - (3xy^2 + 2y \operatorname{cos} x)dy = 0$  es exacta. Resolverla.



Ejemplo con parámetros: ¿Qué valores de los parámetros  $\alpha, \beta$  hacen que la siguiente EDO sea exacta? Resolverla en ese caso

$$3x^2y \frac{dx}{dy} = 1 + \beta y - x^\alpha$$



## Factor integrante y su existencia

¿Qué podemos hacer si una EDO no es exacta? Es decir:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

En estos casos, vamos a tratar de convertirla en exacta mediante la búsqueda de un factor integrante.

$$\mu(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = 0$$

Tenemos que:

$$\mu(x, y) \cdot P(x, y) \rightarrow \frac{\partial[\mu(x, y) \cdot P(x, y)]}{\partial y} = \mu_y \cdot P + \mu \cdot P_y$$

$$\mu(x, y) \cdot Q(x, y) \rightarrow \frac{\partial[\mu(x, y) \cdot Q(x, y)]}{\partial x} = \mu_x \cdot Q + \mu \cdot Q_x$$

Igualamos las expresiones:

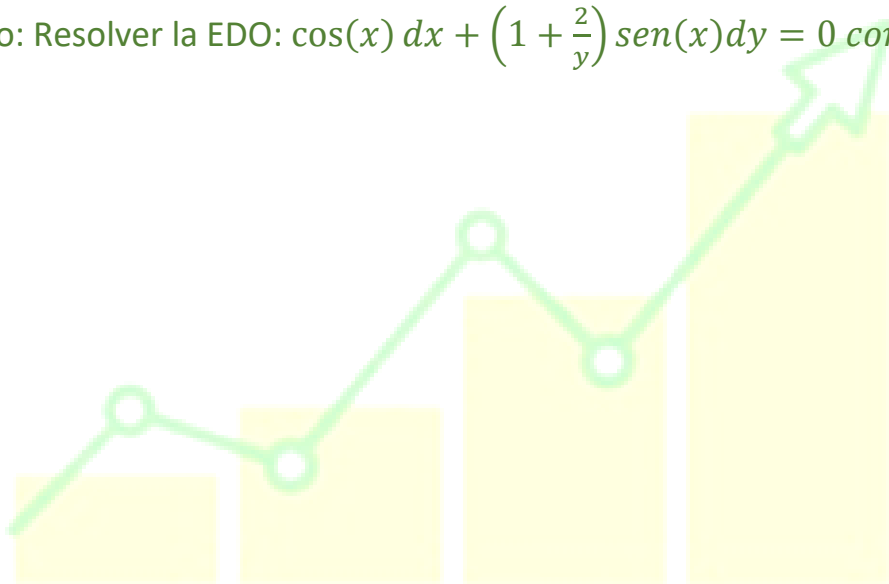
$$\mu_y \cdot P + \mu \cdot P_y = \mu_x \cdot Q + \mu \cdot Q_x \rightarrow$$

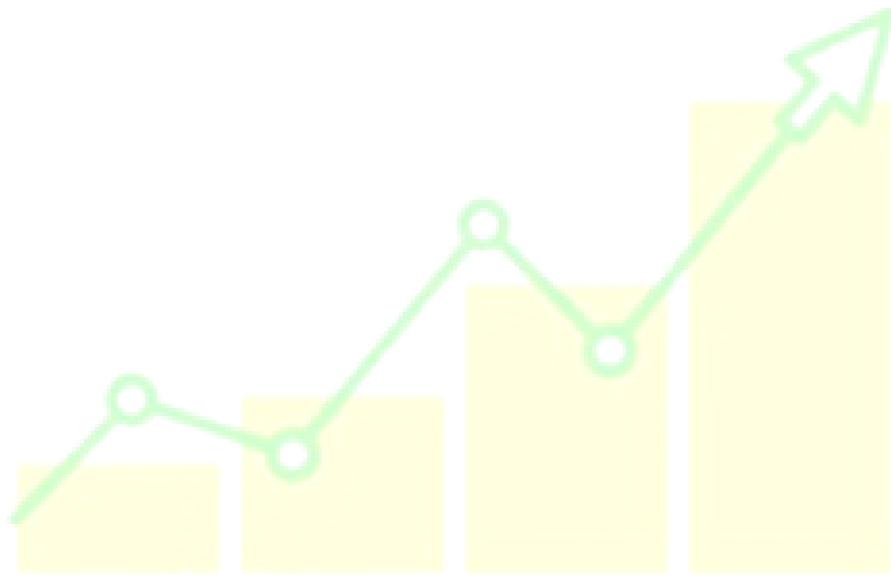
$$\mu(P_y - Q_x) = \mu_x \cdot Q - \mu_y \cdot P$$

Existen 3 casos:

- $\mu$  solo depende de  $x \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$
- $\mu$  solo depende de  $y \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{M_y - N_x}{M}$
- $\mu$  depende de ambas\*  $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y}$

Ejemplo: Resolver la EDO:  $\cos(x) dx + \left(1 + \frac{2}{y}\right) \text{sen}(x) dy = 0$  con  $\mu(y)$





## 2.4 LA ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

La ecuación lineal de primer orden tiene la forma:

$$y' + f(x)y + g(x) = 0$$

Cuya solución general es:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[ C - \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \right]$$

Ejercicio 1: Resolver la ecuación diferencial lineal  $x \frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$



Ejercicio 2: Resolver la EDO  $y' + \frac{y}{x} + x^3 = 0$



## 2.5 Ecuación de Bernouilli

Decimos que una ecuación es de Bernouilli si es de la forma

$$y' + f(x)y + g(x)y^n = 0$$

Donde  $f$  y  $g$  son continuas y  $n > 1$ . Podemos convertir la ecuación en una lineal si realizamos el cambio de variable:

$$z = \frac{1}{(1-n)y^{n-1}}; z' = \frac{1}{y^n} y'$$

Si dividimos la ecuación original por  $y^n$

$$\frac{1}{y^n} y' + f(x) \frac{1}{y^{n-1}} + g(x) = 0$$

Y realizando el cambio:

$$z' + (1-n)f(x)z + g(x) = 0$$

Ejercicio 1: Resolver la ecuación de Bernouilli  $y' + 2xy - xy^2 = 0$



