2.1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El capítulo tiene como análisis el estudio y resolución la ecuación de primer orden. En particular, estudiaremos 3 casos muy importantes:

- Separación de variables
- Ecuaciones exactas y reducibles a ellas
- Ecuaciones lineales.

2.2 ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES. ECUACIONES HOMOGÉNEAS.

Nuestro objetivo es resolver:

$$y' = f(x, y)$$

Utilizaremos el método de separación de variables cuando la función $f(x, y)$ pueda expresarse como producto de dos funciones, cada una dependiente de una variable, es decir:

$$f(x, y) = h(y) \cdot g(x)$$

De esta forma, la ecuación original podrá expresarse:

$$\boxed{h(y) \cdot dy = g(x) \cdot dx}$$

Para obtener la SOLUCIÓN GENERAL integramos a ambos lados:

$$\int h(y) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx + C$$

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

Ejemplo: Resolver la EDO $dx + e^{3x} \cdot dy = 0$

Ejemplo: Resolver la EDO $y' = (1 + x)^2$

Algunas EDO no son de variables separable, pero mediante **CAMBIOS DE VARIABLE** se convierten, es el caso de las **ecuaciones homogéneas**:

¿Qué es una función homogénea?

Algunos ejemplos:

$$f(x,y) = x^3 - 2yx^2 + 5xy^2$$

$$f(x,y) = 3x^2y - y^2\sqrt{x^2 + 2y^2}$$

Ecuaciones homogéneas de primer orden: La ecuación $y' = f(x,y)$ es homogénea si $f(x,y)$ es HOMOGÉNEA DE GRADO 0:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y) = f(x,y)$$

Y se debe resolver usando el cambio de variable:

$$\boxed{y = ux \to y' = u'x + u} \leftrightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Si la ecuación la tenemos en la forma:

$$P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$$

Será homogénea si P y Q son homogéneas del mismo grado.

Ejemplos: Comprobar que la ecuación $2xy \cdot dx - (3x^2 - y^2)dy = 0$ es homogénea. Resolverla usando el cambio de variable adecuado.

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

Existen más ecuaciones que con el cambio de variable adecuado se convierten en variable separadas:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

En este caso existen dos posibilidades:

<u>Rectas no paralelas</u>: $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b1} \rightarrow$ deberemos hacer los cambios de variable:

$$x = u + \alpha; y = v + \beta$$

Donde (α, β) es el punto de corte de las rectas.

<u>Rectas paralelas</u>: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b1} = k \rightarrow$ La ecuación queda de la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$

Y se resuelve con el cambio de variable $z = a_1x + b_1y$

Resolver la ecuación: $y' = \frac{2y-1}{y+x}$

2.3 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS. FACTORES INTEGRANTES.

Decimos que la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es exacta si las funciones P y Q son el Gradiente de una función $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y); \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

$F(x,y) = C$ es la solución general y F se denomina función potencial de P y Q

Existencia de la función potencial

Sean P y Q dos funciones reales definidas y de clase 2 (C^2) en un recinto convexo de $\mathbb{R}^2$. La condición necesaria y suficiente para que (P,Q) sea el gradiente de una función F es que se cumpla:

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$$

¿Cómo la resolvemos? Los pasos a seguir son siempre los mismos:

a) Se integra $P(x,y)$ respecto de x

$$F(x,y) = \int P(x,y) \cdot dx + k(y)$$

b) Se calcula $k(y)$ derivando respecto de y la igualdad anterior, entonces

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y) \cdot dx\right) + k'(y) \rightarrow k'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y) \cdot dx\right)$$

c) Se sustituye $k(y)$ en la igualdad de a).

Ejemplo: Comprobar que la EDO $(x - y^3 + y^2 senx)dx - (3xy^2 + 2ycosx)dy = 0$ es exacta. Resolverla.

Ejemplo con parámetros: ¿Qué valores de los parámetros α, β hacen que la siguiente EDO sea exacta? Resolverla en ese caso

$$3x^2y\frac{dx}{dy} = 1 + \beta y - x^{\alpha}$$

Factor integrante y su existencia

¿Qué podemos hacer si una EDO no es exacta? Es decir:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

En estos casos, vamos a tratar de convertirla en exacta mediante la búsqueda de un factor integrante.

$$\mu(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0$$

Tenemos que:

$$\mu(x,y) \cdot P(x,y) \rightarrow \frac{\partial[\mu(x,y) \cdot P(x,y)]}{\partial y} = \mu_y \cdot P + \mu \cdot P_y$$

$$\mu(x,y) \cdot Q(x,y) \rightarrow \frac{\partial[\mu(x,y) \cdot Q(x,y)]}{\partial x} = \mu_x \cdot Q + \mu \cdot Q_x$$

Igualamos las expresiones:

$$\mu_y \cdot P + \mu \cdot P_y = \mu_x \cdot Q + \mu \cdot Q_x \rightarrow$$

$$\boxed{\mu(P_y - Q_x) = \mu_x \cdot Q - \mu_y \cdot P}$$

Existen 3 casos:

- μ solo depende de $x \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$

- μ solo depende de $y \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{M_y - N_x}{M}$

- μ depende de ambas* $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y}$

Ejemplo: Resolver la EDO: $\cos(x)\,dx + \left(1 + \frac{2}{y}\right) sen(x)dy = 0\ con\ \mu(y)$

.

2.4 LA ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

La ecuación lineal de primer orden tiene la forma:

$$\boxed{y' + f(x)y + g(x) = 0}$$

Cuya solución general es:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[C - \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right]}$$

Ejercicio 1: Resolver la ecuación diferencial lineal $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

Ejercicio 2: Resolver la EDO $y' + \frac{y}{x} + x^3 = 0$

2.5 Ecuación de Bernouilli

Decimos que una ecuación es de Bernouilli si es de la forma

$$\boxed{y' + f(x)y + g(x)y^n = 0}$$

Donde f y g son continuas y $n > 1$. Podemos convertir la ecuación en una lineal si realizamos el cambio de variable:

$$z = \frac{1}{(1-n)y^{n-1}}; z' = \frac{1}{y^n}y'$$

Si dividimos la ecuación original por y^n

$$\frac{1}{y^n}y' + f(x)\frac{1}{y^{n-1}} + g(x) = 0$$

Y realizando el cambio:

$$\boxed{z' + (1-n)f(x)z + g(x) = 0}$$

Ejercicio 1: Resolver la ecuación de Bernouilli $y' + 2xy - xy^2 = 0$

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |