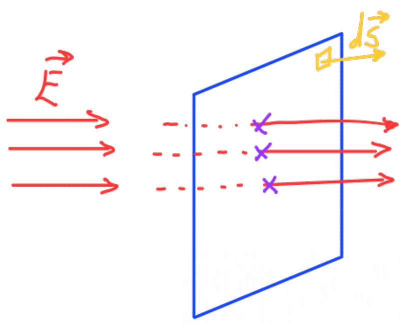
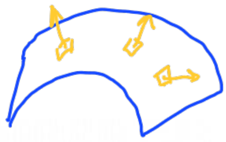
TEMA 2. LEY DE GAUSS

1. FLUJO

Definiremos flujo como el número de líneas de campo que atraviesan una superficie y, de manera general, lo calcularemos como:

$$\boxed{\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS}}$$

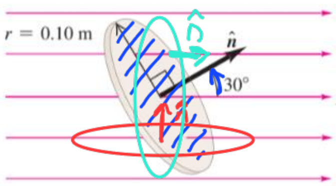




EJERCICIO 2.1. (Sears y Zemansky, Física Universitaria, Ejemplo 22.1)

Un disco de radio igual a 0.10 m está orientado con su vector unitario normal $\hat{n}$ a un ángulo de 30° con respecto a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ con magnitud de $\boxed{2.0 \times 10^3\ \text{N/C}}$ (**figura 22.7**). (Como ésta no es una superficie cerrada, no tiene un "interior" ni un "exterior"; por ello en la figura se tiene que especificar la dirección de $\hat{n}$). *a)* ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? *b)* ¿Cuál sería el flujo que cruzaría el disco si se girara de manera que $\hat{n}$ fuera perpendicular a $\vec{E}$? *c)* ¿Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si $\hat{n}$ fuera paralela a $\vec{E}$?

22.7 El flujo eléctrico Φ_E a través de un disco depende del ángulo entre su normal $\hat{n}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$.



a) $\phi = \int \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int E \cos\theta \, dS =$

$= E \cos\theta \int dS = E \cos\theta \; S = ES\cos\theta$

$= 2{,}0 \cdot 10^3 \cdot \pi R^2 \cdot \cos 30° =$

$= 2000 \cdot \pi \cdot 0{,}1^2 \cos 30° = \boxed{54 \ \frac{N \cdot m^2}{C}}$

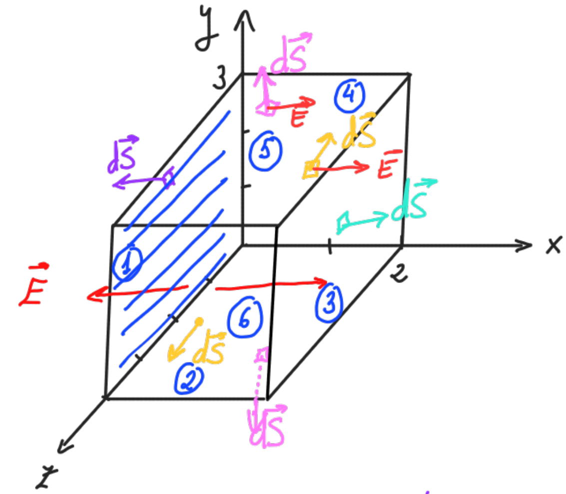
b) $\phi = \int \vec{E} \cdot \vec{dS} = \boxed{0 \ \frac{N \cdot m^2}{C}} = \int E \cos\theta \, dS = \int E \cancel{\cos 90°} \, dS = 0$

$\vec{E} \perp \vec{dS}$; $\cos 90° = 0$

c) $\phi = \int \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int E \, dS = E \int dS = ES = 2{,}0 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 0{,}1^2 = \boxed{63 \ \frac{N \cdot m^2}{C}}$

$\vec{E} \parallel \vec{dS}$

EJERCICIO 2.2 En una región del espacio existe un campo eléctrico de valor $\vec{E} = 5x\,\vec{i}$. Calcule el flujo eléctrico sobre un paralelepípedo, centrado en el origen de coordenadas y con lados 2, 3 y 4.



$$\phi = \cancel{\phi_1}^{0} + \cancel{\phi_2}^{0} + \phi_3 + \cancel{\phi_4}^{0} + \cancel{\phi_5 + \phi_6}^{0} = \boxed{120\ \frac{N\cdot m^2}{C}}$$

$$\phi_1 = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = \underset{x=0}{\int} 0\,dS = 0$$

$$\phi_2 = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 = \phi_4$$

$$\phi_3 = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS \underset{\substack{x=2\\ E=5\cdot 2=10}}{=} \int 10\,dS = 10\int dS = 10S = 10\cdot 3\cdot 4 = 120$$

$$\phi_5 = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 = \phi_6$$

NOTA. En superficies cerradas tomamos siempre $d\vec{S}$ con sentido hacia el exterior.

2. LEY DE GAUSS

La ley de Gauss fue formulada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada por dicha superficie.

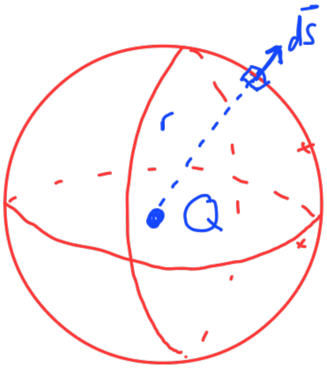
$$\boxed{\phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o}}$$

Demostración.

$$\phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = \int k\frac{q}{r^2}\,dS = k\frac{q}{r^2}\int dS =$$

$$= k\frac{q}{r^2}S = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\cancel{r^2}}\cancel{4\pi r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

EJERCICIO 2.3. Calcula, utilizando la ley de Gauss, el campo eléctrico generado por una carga Q en un punto a una distancia r.



$$\phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = ES = E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

EJERCICIO 2.4 Calcula el campo eléctrico generado por una esfera, no conductora, hueca, muy fina, de radio R, y cargada con una carga total Q en un punto a una distancia r.

1 $\quad \phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = ES = E\,4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

2 $\quad \phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = ES = E\,4\pi r^2 = \frac{\cancel{Q_{enc}}^{\,0}}{\varepsilon_0}$

$$E\,4\pi r^2 = 0$$

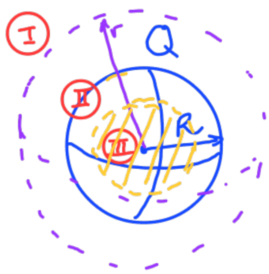
$$\boxed{E = 0}$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r \geq R \\ 0 & \text{si } 0 \leq r < R \end{cases}$$

3 $\quad r = R \qquad \phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES = E\,4\pi R^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

EJERCICIO 2.5 Calcula el campo eléctrico generado por una esfera, no conductora, maciza, de radio R, y cargada con una carga total Q en un punto a una distancia r.



I $\quad \phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = E\int dS = ES = E\,4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

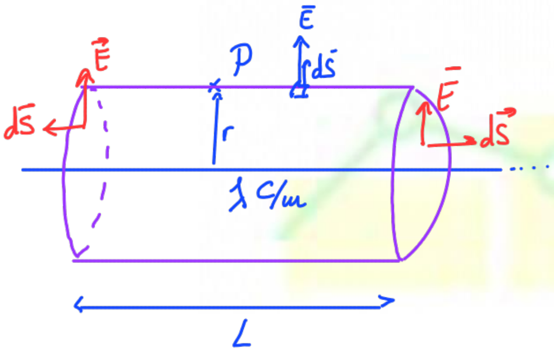
II $\quad \phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = ES = E\,4\pi R^2 = \frac{\overset{Q}{\cancel{Q_{enc}}}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

III $\quad \phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = ES = E\,4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{\rho V_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow E\,4\pi \cancel{r^2} = \frac{\frac{Q}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R^3}\cdot \cancel{\frac{4}{3}\pi} r^{\cancel{3}}}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

EJERCICIO 2.6 Calcula el campo eléctrico generado por un hilo muy largo, de radio despreciable, con una densidad de carga de λ C/m en un punto P a una distancia r.



$$\phi = \phi_{lat} + \phi_{izq} + \phi_{dcha}$$

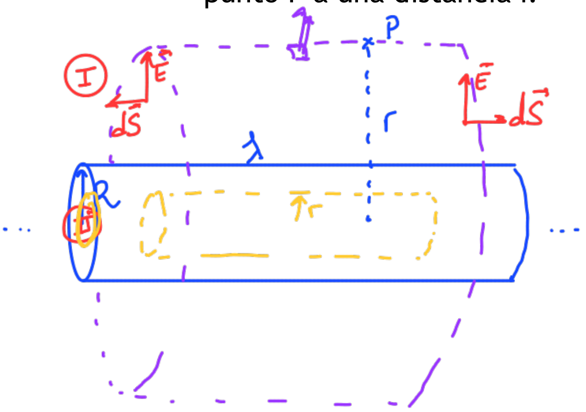
$$= \int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{izq} \underbrace{\cancel{\vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} + \int_{dcha} \underbrace{\cancel{\vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} =$$

$$= \int_{lat} E\,dS = E\int_{lat} dS = ES = E\,L\cdot 2\pi r = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E\,\cancel{L}\,2\pi r = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}}$$

EJERCICIO 2.7 Calcula el campo eléctrico generado por un cilindro muy largo, de radio R, hueco, de espesor despreciable, con una densidad de carga de λ C/m, en un punto P a una distancia r.



I $\phi = \phi_{lat} + \phi_{izq} + \phi_{dcha} = \int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\cancel{\int_{izq} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\int_{dcha} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0}$

$= \int_{lat} E\,dS = E S_{lat} = E L 2\pi r = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

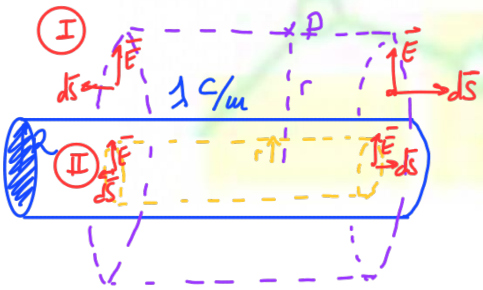
$E \cancel{L} 2\pi r = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

II $\phi = \phi_{lat} + \phi_{izq} + \phi_{dcha} = \int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\cancel{\int_{izq} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\int_{dcha} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} = \int_{lat} E\,dS = E S_{lat} = E L 2\pi r = \frac{\cancel{Q_{enc}}^{\,0}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = 0}$$

EJERCICIO 2.8 Calcula el campo eléctrico generado por un cilindro muy largo, de radio R, macizo y no conductor, con densidad de carga λ C/m uniformemente distribuida, en un punto P a una distancia r.



$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda \cancel{L}}{\pi R^2 \cancel{L}}$

I $\phi = \phi_{lat} + \phi_{izq} + \phi_{dcha} = \int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\cancel{\int_{izq} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\int_{dcha} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} =$

$= \int_{lat} E\,dS = E S_{lat} = E L 2\pi r = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

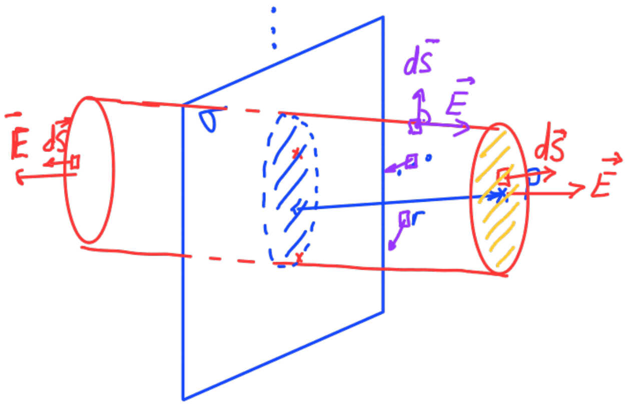
$E \cancel{L} 2\pi r = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

II $\phi = \phi_{lat} + \phi_{izq} + \phi_{dcha} = \int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\cancel{\int_{izq} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\int_{dcha} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} = \int_{lat} E\,dS = E S_{lat} = E L 2\pi r = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$E L 2\pi r = \frac{\rho V_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow E \cancel{L} 2\cancel{\pi} r = \frac{\rho \cancel{\pi} r^2 \cancel{L}}{\varepsilon_0} \quad E = \frac{\frac{\lambda}{\pi R^2} r^{\cancel{2}}}{2\varepsilon_0 \cancel{r}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}}$

EJERCICIO 2.9 Calcula el campo eléctrico generado por una lámina muy grande de espesor despreciable y cargada con una densidad superficial de carga σ C/m^2 en un punto P a una distancia r de la lámina.



$$\phi = \phi_{izq} + \phi_{lat} + \phi_{dcha} = \int_{izq} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\cancel{\int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} + \int_{dcha} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

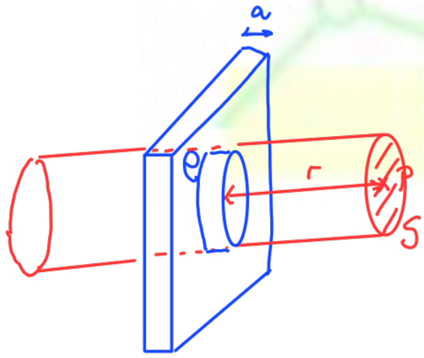
$$= \int_{izq} E\,dS + \int_{dcha} E\,dS = E\int_{izq} dS + E\int_{dcha} dS = E\,S_{izq} + E\,S_{dcha}$$

$$= ES + ES = 2ES = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$2E\cancel{S} = \frac{\sigma \cancel{S}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

EJERCICIO 2.10 Calcula el campo eléctrico generado por una lámina muy grande, de a m de espesor y cargada con una densidad de carga ρ C/m^3 en un punto P a una distancia r de la lámina.



$$\phi = \phi_{izq} + \phi_{lat} + \phi_{dcha} = \int_{izq} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\cancel{\int_{lat} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0} + \int_{dcha} \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \int_{izq} E\,dS + \int_{dcha} E\,dS = E\,S_{izq} + E\,S_{dcha} = ES + ES = 2ES = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

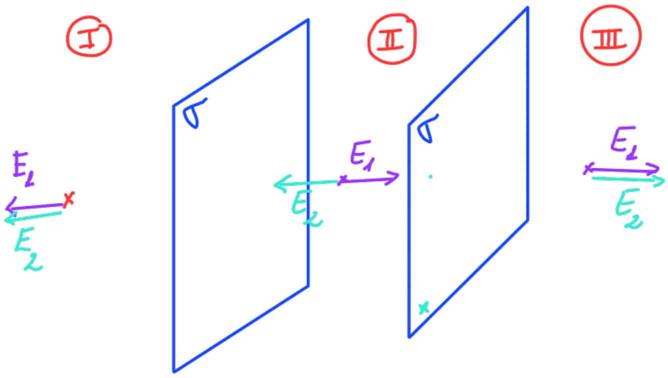
$$2E\cancel{S} = \frac{\rho\, a\, \cancel{S}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}}$$

EJERCICIO 2.11 Calcula el campo eléctrico generado por dos láminas paralelas y muy grandes, de espesor despreciables cargadas, ambas con una densidad superficial de carga σ C/m^2 en un punto P a una distancia r de la primera lámina.

I $\vec{E} = (E_1+E_2)(-\vec{i}) = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(-\vec{i})$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}}$$



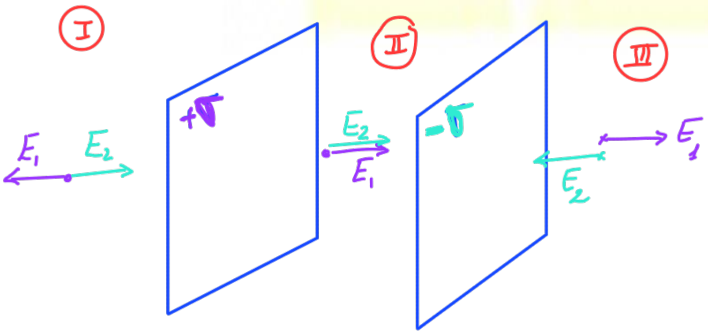
II $\boxed{\vec{E} = (E_1-E_2)\vec{i} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{i} = 0}$

III $\vec{E} = (E_1+E_2)\vec{i} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{i}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}}$$

EJERCICIO 2.12 Calcula el campo eléctrico generado por dos láminas paralelas y muy grandes, de espesor despreciables cargadas, la primera con una densidad superficial de carga +σ C/m^2 y la segunda -σ C/m^2, en un punto P a una distancia r de la primera lámina.

I $\boxed{\vec{E} = (E_2-E_1)\vec{i} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{i} = 0}$



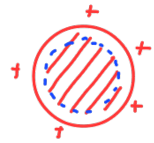
II $\boxed{\vec{E} = (E_2+E_1)\vec{i} = \left(\frac{|-\sigma|}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{i} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}}$

III $\boxed{\vec{E} = (E_1-E_2)\vec{i} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{|-\sigma|}{2\varepsilon_0}\right)\vec{i} = 0}$

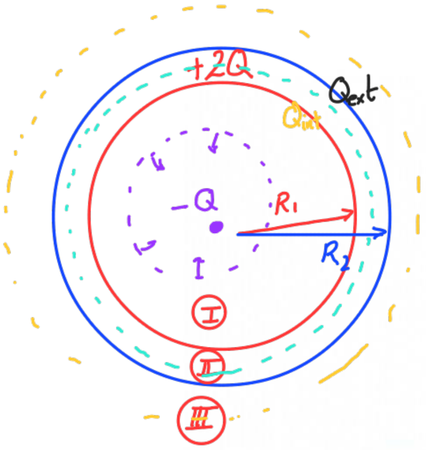
3. CASOS PARTICULARES EN MATERIALES CONDUCTORES

En materiales conductores en equilibrio debemos recordar que siempre se presentan cuatro características:

- La carga total interior es nula.
- Si el conductor tiene carga, ésta se reparte en superficie.
- El campo eléctrico en el interior es nulo. $\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES = \frac{\cancel{Q_{enc}}^{\,0}}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow E=0$
- El potencial eléctrico en el interior es constante e igual al de la superficie.



EJERCICIO 2.13 Calcula el campo eléctrico generado por una esfera conductora de radios R_1 y R_2, cargada con una carga +2Q y que en su centro se encuentra una carga puntual -Q.



I $\; r < R_1$

$$\phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\,dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

II $\; R_1 \leq r < R_2$ $\quad \boxed{E=0}$

$$\rightsquigarrow \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dots = E4\pi r^2 = \frac{\cancel{Q_{enc}}^{\,Q_{int}+(-Q)}}{\varepsilon_0}$$

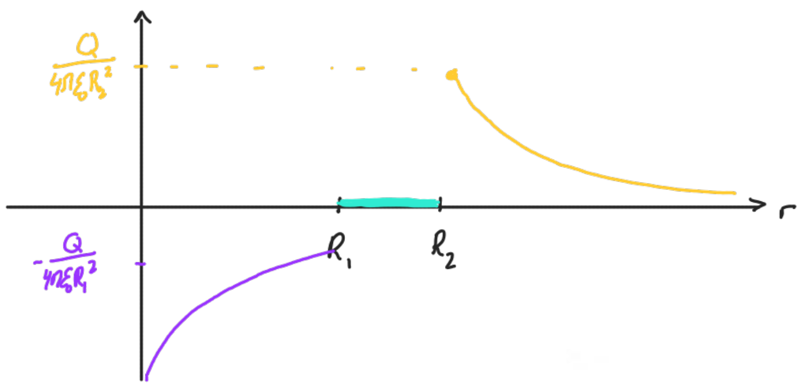
$$0 = \frac{Q_{int} - Q}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow \boxed{Q_{int} = Q}$$

$$Q_{cond} = 2Q = Q_{int} + Q_{ext} \rightarrow 2Q = Q + Q_{ext} \rightarrow \boxed{Q_{ext} = Q}$$

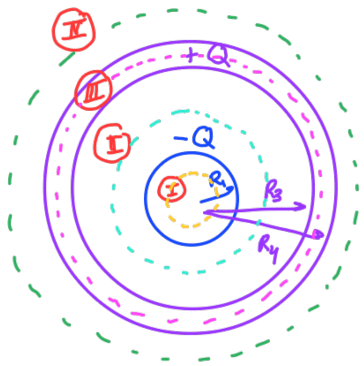
III $\; r > R_2$

$$\phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dots = E4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{2Q+(-Q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



EJERCICIO 2.14 Calcula el campo eléctrico generado por un sistema formado por dos esferas conductoras, la interior de radio R_1, cargada con una carga -Q y la exterior, de radios R_3 y R_4 y carga +Q.



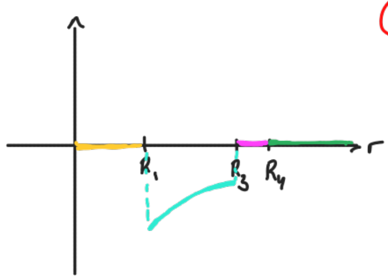
I $r < R_1$ $\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \cancel{\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}^{\,0} \rightarrow \boxed{E=0}$

II $R_1 < r < R_3$ $\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \cancel{\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}^{\,-Q} \rightarrow \boxed{E = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

III $R_3 < r < R_4$ $\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\cancel{E}}_{0}4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$ $\quad \boxed{E=0}$

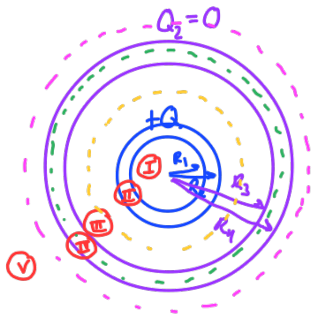
$Q_{enc} = 0 \rightsquigarrow -Q + Q_{int} = 0 \rightarrow Q_{int} = Q$

IV $r \geq R_4$ $\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \cancel{\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}^{\,+Q-Q} \rightarrow E = \frac{0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad \boxed{E=0}$



EJERCICIO 2.15 Calcula el campo eléctrico generado por un sistema formado por dos esferas conductoras huecas y concéntricas, la interior de radios R_1 y R_2, cargada con una carga +Q y la exterior, de radios R_3 y R_4 y descargada.

I $r < R_1$ $\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \cancel{\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}^{\,0} \rightarrow \boxed{E=0}$

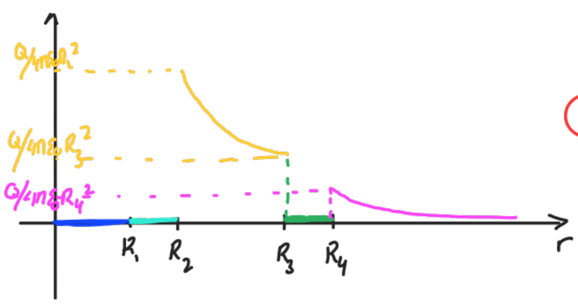


II $R_1 \leq r < R_2$ $\quad \boxed{E = 0\ N/C}$ por estar en el interior de un conductor

$E4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow 0 = \frac{Q_{1,int}}{\varepsilon_0} \rightarrow Q_{1,int} = 0$

$Q_1 = +Q = \underbrace{\cancel{Q_{1,int}}}_{0} + Q_{1,ext} \rightarrow Q_{1,ext} = +Q$

III $R_2 \leq r < R_3$ $\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \cancel{\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}^{\,Q} \rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$



IV $R_3 \leq r < R_4$ $\quad \boxed{E = 0\ N/C}$ por estar en el interior de un conductor

$E4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow 0 = \frac{0 + Q + Q_{2,int}}{\varepsilon_0} \rightarrow Q_{2,int} = -Q$

$Q_2 = 0 = Q_{2,int} + Q_{2,ext} \rightsquigarrow Q_{2,ext} = Q$

V $r \geq R_4$ $\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \cancel{\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}^{\,Q+0} \rightsquigarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$