1.6 El azar

El azar implica que más de una cosa puede ocurrir y cada posibilidad tiene asociada una probabilidad de ocurrencia.

VALOR ESPERADO

Si conocemos el valor de cada posible suceso y su probabilidad podremos calcular el valor esperado.

$$E(x) = \sum x_i \, p(x_i)$$

PROBABILIDAD

$$\rightarrow p(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

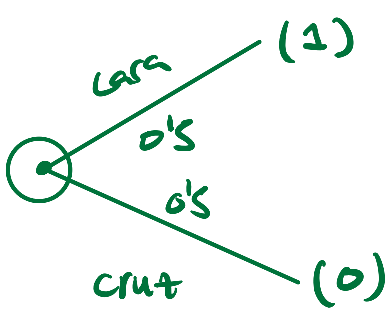
La probabilidad se define como el número de casos favorables dividido entre el número de casos posibles (Regla de Laplace).

$$\text{A} \rightarrow \text{suceso} \begin{cases} p(A) = 0 \rightarrow \text{ A suceso imposible} \\ p(A) = 1 \rightarrow \text{ A suceso seguro} \end{cases}$$

Sucesos independientes: $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$

VALOR ESPERADO MONETARIO (VEM)

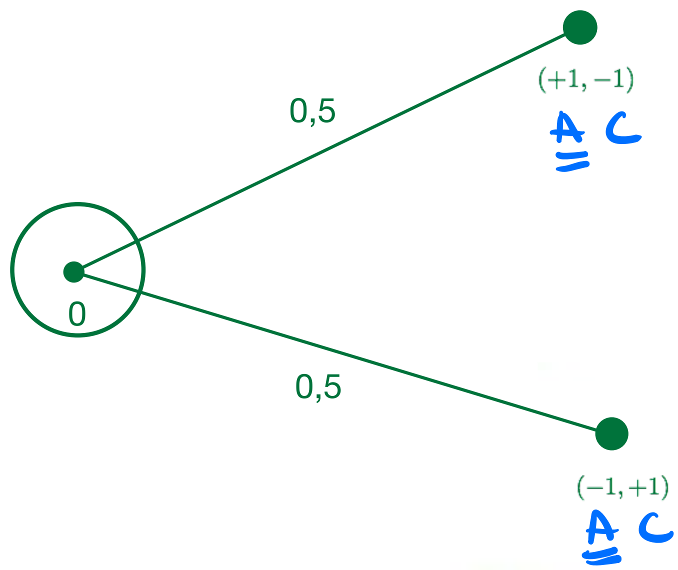
El valor esperado monetario es una media ponderada donde las ponderaciones son las posibilidades de cada posible a suceso y las cantidades promediadas son las ganancias o pérdidas asociadas a cada suceso.



$$VEM = \underline{1} \cdot 0'5 + \underline{0} \cdot 0'5 = 0'5$$

JUEGO DE AZAR JUSTO

Imaginemos un juego en el que se puede ganar un euro con una probabilidad de 0,5 o perder un euro con una probabilidad de 0,5.



$$VEM_{\underline{apostador}} = (0,5)\,(+1) + (0,5)\,(-1) = 0$$

$$VEM_{casino} = (0,5)\,(-1) + (0,5)\,(+1) = 0$$

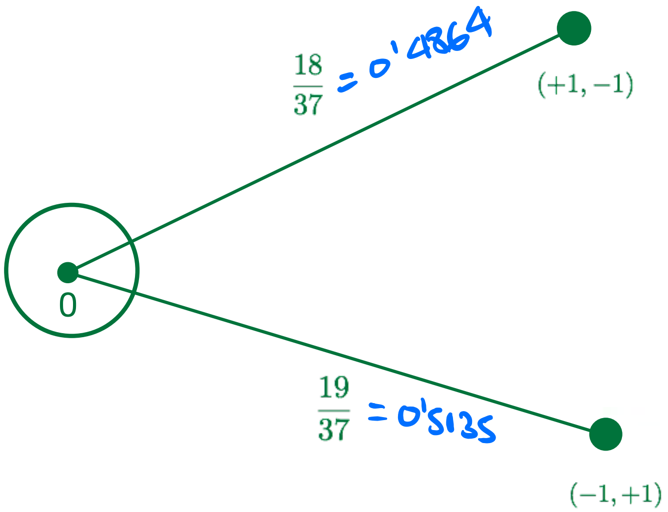
El valor esperado del juego tanto para el apostador como para el casino es cero.

Cuando el juego de azar ofrece un valor esperado de cero para el apostador y también para el casino lo llamamos **JUEGO JUSTO**.

Esto quiere decir que si lo jugamos un número muy elevado de veces obtendríamos una ganancia media de cero.

JUEGO DE AZAR INJUSTO

Imaginemos el juego siguiente:



$$VEM_{apostador} = (18/37)\,(+1) + (19/37)\,(-1) = -0,027$$

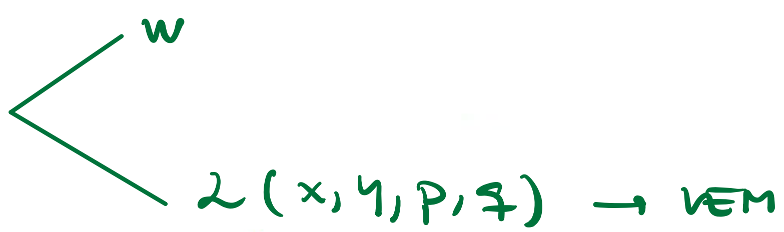
$$VEM_{casino} = (18/37)\,(-1) + (19/37)\,(+1) = +0,027$$

En este juego las ganancias no han cambiado pero las probabilidades sí. El cambio es muy pequeño, pero lo suficiente para que el juego se desequilibre en beneficio del casino.

Esto sería un ejemplo claro de **JUEGO INJUSTO**.

Lotería $\quad L(x, y, p, q) \quad p+q=1$

$$VEM = x \cdot p + y \cdot q$$



1.7 Elección entre alternativas con incertidumbre

Análisis de decisiones tomadas bajo incertidumbre.

Decisiones en las que el futuro es incierto, existen varios resultados posibles y cada uno de ellos puede darse con diferente **probabilidad.**

*Para describir cuantitativamente el riesgo, hemos de conocer:

- Todos los **resultados posibles** de un acontecimiento.
- La **probabilidad** de que se produzca **cada resultado**.

VALOR ESPERADO MONETARIO CON INFORMACIÓN PERFECTA

El valor esperado monetario con información perfecta se calcula sumando el valor cierto w por la probabilidad de que toque el premio inferior y el premio superior por su probabilidad.

$$VEM_{ip} = y \cdot p + w \cdot q$$

$y > w \rightarrow y \rightarrow p$

$x < w \rightarrow x \rightarrow q$

$$VEMip > w$$

$$VEMip > VEM$$

VALOR DE LA INFORMACIÓN PERFECTA

$$VIP = VEMip - VEM \rightarrow$$ cantidad de dinero que representa la máxima cantidad dispuesta a pagar para saber que va a ocurrir

1.8 Las distintas actitudes ante el riesgo

No todas las personas valoran igual el riesgo. En el mundo real distintas personas harán elecciones diferentes ante un mismo caso.

- INDIVIDUO NEUTRAL ANTE EL RIESGO: cuando para un individuo una cantidad cierta de dinero equivale a otra incierta de igual valor esperado monetario pero con riesgo, decimos que el individuo es neutral ante el riesgo.

- INDIVIDUO AVERSO AL RIESGO: si un individuo valora más una cantidad segura que un valor monetario equivalente pero con algún riesgo implícito, entonces hablaríamos de un individuo averso a riesgo.

- INDIVIDUO AMANTE DEL RIESGO: si un individuo valora más una cantidad con riesgo que otra equivalente pero cierta, diremos que es amante del riesgo.

PRIMA DE RIESGO

La **prima de riesgo** (**PR**) se define como la diferencia entre el valor esperado monetario de la lotería y la cantidad de dinero cierta que las personas considera igualmente deseable.

Llamamos a la cantidad cierta **equivalente cierto EC**.

$$PR = VEM - EC$$

- INDIVIDUO NEUTRAL ANTE EL RIESGO: $PR = VEM - EC = 0 \rightarrow VEM = EC$
- INDIVIDUO AVERSO AL RIESGO: $PR = VEM - EC > 0 \rightarrow VEM > EC$
- INDIVIDUO AMANTE DEL RIESGO: $PR = VEM - EC < 0 \rightarrow VEM < EC$

1.9 La teoría de la utilidad esperada

En 1944 von Neumann y Morgenstern desarrollaron el libro de Theory of Games and Economics Behavior, lo que se conoce como teoría de la utilidad esperada. Esta teoría explica cómo eligen las personas entre alternativas con riesgo.

Según esta teoría las personas comparan no cantidades monetarias entre sí, ciertas o probables, sino las utilidades asociadas a estas cantidades monetarias.

La utilidad de una cantidad de dinero w será u(w) mientras que la utilidad esperada de la lotería L(x, y; p,q) se define como:

$VEM = x \cdot p + y \cdot q$

$$\boxed{Eu\left(L\right)=u\left(x\right)\cdot p+u\left(y\right)\cdot q}$$

En general esta utilidad esperada no coincide con el valor esperado monetario:

$$Eu\left(L\right)\neq u\left(VEM\right)$$

El consumidor, al tener que elegir entre alternativas que incorporan alguna clase de riesgo, como las loterías, elegirá la que maximice su utilidad esperada.

Volviendo al concepto de prima de riesgo y equivalente cierto podemos definir ahora con rigor que es el equivalente cierto.

EQUIVALENTE CIERTO (EC) es una cantidad sin riesgo tal que la persona considera equivalente su utilidad a la esperada del juego, es decir, Eu(L)=u(EC), de manera que, si le ofrecieran EC como alternativa a jugar, dudaría, mostrándose indiferente.

- INDIVIDUO NEUTRAL ANTE EL RIESGO: Eu(L)=u(EC)=u(VEM)
- INDIVIDUO AVERSO AL RIESGO: Eu(L)=u(EC)<u(VEM)
- INDIVIDUO AMANTE DEL RIESGO: Eu(L)=u(EC)>u(VEM)

INFO@ADEFACIL.COM

EJERCICIO 1

Imagine una persona que se muestra indiferente entre recibir 700€ o un billete de lotería:

L_1(0, 1000; 0,15, 0,85) $\rightarrow$ $u(700) = Eu(L_1)$

Esta misma persona se muestra indiferente entre recibir 300€ o un billete de lotería:

L_2(0, 700; 0,35, 0,65) $\rightarrow$ $u(300) = Eu(L_2)$

Normalizamos la función de utilidad que empleamos, haciendo:

- u(1000)= 1
- u(0)= 0

Con esta información ¿cuál de estas dos loterías preferiría esta persona?

A: L (0, 1000; 0,33, 0,67)
B: L (300, 700; 0,5, 0,5)

- $Eu(L_1) = \overbrace{u(0)}^{0} \cdot 0'15 + \overbrace{u(1000)}^{1} \cdot 0'85 = 0'85$

  $u(700) = 0'85 \rightarrow 0'85$

- $Eu(L_2) = \overbrace{u(0)}^{0} \cdot 0'35 + \overbrace{u(700)}^{0'85} \cdot 0'65 = 0'85 \cdot 0'65 = 0'5525$

  $u(300) = 0'5525$

$A \rightarrow Eu(LA) = \underbrace{u(0)}_{0} \cdot 0'33 + \underbrace{u(1000)}_{1} \cdot 0'67 = 0'67$

$B \rightarrow Eu(LB) = \underbrace{u(300)}_{0'5525} \cdot 0'5 + \underbrace{u(700)}_{0'85} \cdot 0'5 = 0'70125$

$Eu(LB) > Eu(LA)$

Preferimos LB

EJERCICIO 2

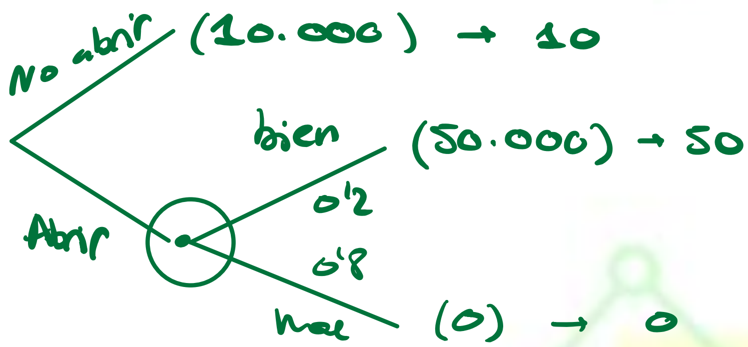
En Estados Unidos el 80% de los pequeños negocios fracasan, como un restaurante, agencias de viajes o cosas similares. Una persona invierte 10.000 $ de sus ahorros en un pequeño negocio.

En el momento 0 el azar determina si el negocio próspero o no.

Las probabilidades de éxito y fracaso son p=0,2 y p=0,8 respectivamente.

Si el negocio está predestinado al éxito y el inversor invierte, conseguirá 50.000 $. Pero si el negocio está predestinado al fracaso y el inversor invierte, obtendrá 0 como resultado de la inversión, que implica perder lo invertido.

Si no invierte, se queda con los 10.000 $ que tenía ahorrados, es decir como estaba.

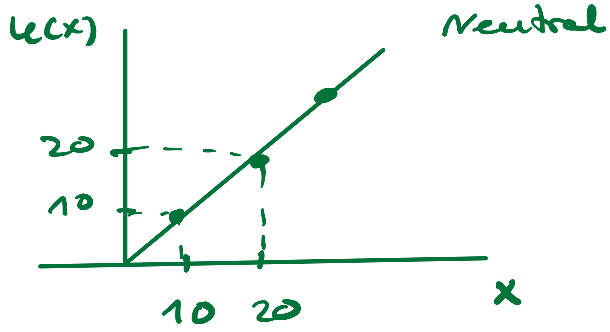


- $VEM_{\text{participar juego}} = 0'2(50-10) + 0'8(0-10) = 0$

JUEGO JUSTO

- $VEM_{\text{abrir}} = 50 \cdot 0'2 + 0 \cdot 0'8 = 10$
- $VEM_{ip} = 50 \cdot 0'2 + 10 \cdot 0'8 = 18$
- $VIP = VEM_{ip} - VEM = 18 - 10 = 8$ → El máximo que estamos dispuestos a pagar por conocer a priori el resultado

$* $ Ejemplo: $u(w) = w \left\{ \begin{array}{l} w = 10 \to u(10) = 10 \\ w = 20 \to u(20) = 20 \end{array} \right.$



$L(0, 50, 0'8, 0'2)$

- $Eu(L_{abrir}) = u(0) \cdot 0'8 + u(50) \cdot 0'2 =$
  $= 0 \cdot 0'8 + 50 \cdot 0'2 = 10$

- $Eu(\text{no abrir}) = Eu(w) = 10$

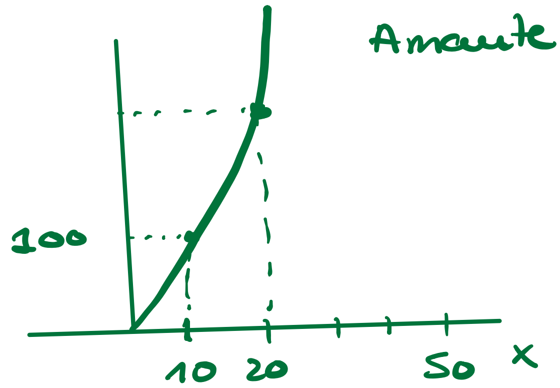
$\left. \begin{array}{r} Eu(L_{abrir}) = u(EC) = 10 \\ u(EC) = EC \end{array} \right\} EC = 10$

- $PR = VEM - EC = 10 - 10 = 0$ → neutral ante el riesgo

$\left. \begin{array}{r} Eu(L_{abrir}) = u(EC) = 10 \\ u(VEM) = VEM = 10 \end{array} \right\} Eu(L_{abrir}) = u(EC) = u(VEM)$

* Ejemplo: $u(w) = w^2$ $\begin{cases} u(10) = 10^2 = 100 \\ u(50) = 50^2 = 2500 \end{cases}$

$L(0, 50, 0'8, 0'2)$



- $Eu(L) = u(0) \cdot 0'8 + u(50) \cdot 0'2 =$
  $= 0 \cdot 0'8 + 50^2 \cdot 0'2 = 500$

- $Eu(\text{no abrir}) = E(w) = w^2 = 10^2 = 100$

- $\left.\begin{array}{l} Eu(L) = u(EC) = 500 \\ u(EC) = EC^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} EC^2 = 500 \\ EC = \sqrt{500} = 22'36 \end{array}$

- $PR = VEM - EC = 10 - 22'36 = -12'36 < 0 \rightarrow$ Amante del riesgo

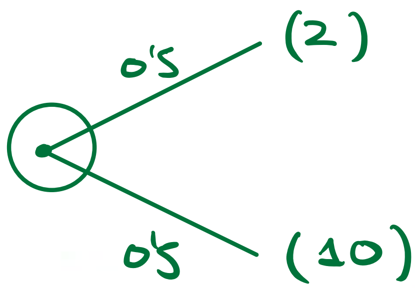
$\left.\begin{array}{l} Eu(L) = u(EC) = 500 \\ u(VEM) = 10^2 = 100 \end{array}\right\} Eu(L) = u(EC) > u(VEM)$

EJERCICIO 3

A una persona se le propone un juego (Lotería) que consiste en elegir una de dos manos cerradas que contienen 10 y 2 € respectivamente.

1. Para una persona con una función de utilidad $u(w) = w$ → Neutral $PR = 0$
2. Para una persona con una función de utilidad $u(w) = w^2$ → Amante $PR < 0$
3. Para una persona con una función de utilidad $u(w) = w^{1/2}$ → Averso $PR > 0$

$L(2, 10, 0'5, 0'5)$



$VEM = 2 \cdot 0'5 + 10 \cdot 0'5 = 6$

1. $u(w) = w$ ⟶ Neutral

- $Eu(L) = u(2) \cdot 0'5 + u(10) \cdot 0'5 =$
  $= 2 \cdot 0'5 + 10 \cdot 0'5 = 6$

- $\left.\begin{array}{l} Eu(L) = u(EC) = 6 \\ u(EC) = EC \end{array}\right\} EC = 6$

- $PR = VEM - EC = 6 - 6 = 0$

- $Eu(L) = u(EC) = u(VEM) = 6$

  $u(VEM) = VEM = 6$

2. $u(w) = w^2$

- $Eu(L) = u(2) \cdot 0'5 + u(10) \cdot 0'5 =$
  $= 2^2 \cdot 0'5 + 10^2 \cdot 0'5 = 52$

- $\left.\begin{array}{l} Eu(L) = u(EC) = 52 \\ u(EC) = EC^2 \end{array}\right\}$ $EC^2 = 52$
  $EC = \sqrt{52} = 7'211$

- $PR = VEM - EC = 6 - 7'211 = -1'21 < 0 \rightarrow$ Amante del riesgo

- $\left.\begin{array}{l} Eu(L) = u(EC) = 52 \\ u(VEM) = VEM^2 = 6^2 = 36 \end{array}\right\}$ $Eu(L) = u(EC) > u(VEM)$
  $52 > 36$

3. $u(w) = w^{1/2} = \sqrt{w}$

- $Eu(L) = u(2) \cdot 0'5 + u(10) \cdot 0'5 =$
  $= \sqrt{2} \cdot 0'5 + \sqrt{10} \cdot 0'5 = 2'29$

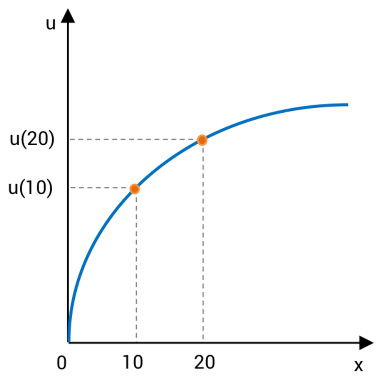
- $\left.\begin{array}{l} Eu(L) = u(EC) = 2'29 \\ u(EC) = \sqrt{EC} \end{array}\right\}$ $\sqrt{EC} = 2'29$
  $EC = (2'29)^2 = 5'23$

- $PR = VEM - EC = 6 - 5'23 = 0'76 > 0 \rightarrow$ Aversa

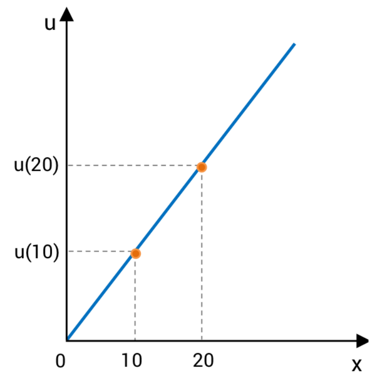
- $Eu(L) = u(EC) = 2'29$
  $u(VEM) = \sqrt{VEM} = \sqrt{6} = 2'5$

$Eu(L) = u(EC) < u(VEM)$
$2'29 < 2'5$

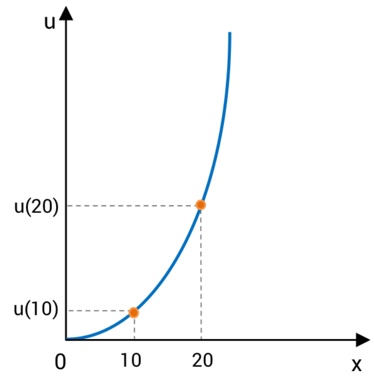
FUNCIONES DE UTILIDAD PARCIAL



Averso



Neutral



Amante

$$u(w) = w^b \begin{cases} w > 0 \Rightarrow \begin{cases} b < 1 \longrightarrow \text{Averso al riesgo} \\ b = 1 \longrightarrow \text{Neutral al riesgo} \\ b > 1 \longrightarrow \text{Amante del riesgo} \end{cases} \\ w < 0 \Rightarrow \begin{cases} b < 1 \longrightarrow \text{Amante del riesgo} \\ b = 1 \longrightarrow \text{Neutral al riesgo} \\ b > 1 \longrightarrow \text{Averso al riesgo} \end{cases} \end{cases}$$