Formas cuadráticas. Clasificación.

1 Clasificación de formas cuadráticas.

Diremos que una forma cuadrática (o una matriz simétrica) es:

- definida positiva si $Q(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.
- definida negativa si $Q(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{0}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.
- semidefinida positiva si $Q(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$, $\forall\, \boldsymbol{x}$
- semidefinida negativa si $Q(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0}$, $\forall\, \boldsymbol{x}$
- indefinida si $\exists\, \boldsymbol{x}' \,/\, Q(\boldsymbol{x}') < \boldsymbol{0}$ y $\exists\, \boldsymbol{x}''\ Q(\boldsymbol{x}'') > \boldsymbol{0}$

2 Criterios para clasificar una forma cuadrática.

2.1 CLASIFICACIÓN MEDIANTE AUTOVALORES.

Una forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\, \boldsymbol{x}$ es definida positiva (negativa) si y sólo si, todos los valores propios de la matriz A son positivos (negativos). Es semidefinida positiva (negativa) si y sólo si, todos los valores propios de la matriz A son mayores (menores) o iguales que cero. Por lo tanto una forma cuadrática será indefinida si existe algún valor propio positivo y alguno negativo.

Observación: como matrices semejantes tienen los mismos valores propios, la clasificación de una matriz se mantiene para matrices semejantes.

2.2 CLASIFICACIÓN MEDIANTE MENORES PREFERENTES

Este criterio utiliza el concepto "reordenación". Reordenar una matriz asociada a una forma cuadrática consiste en que dados i, j con $1 \leq i, j \leq n$, se intercambian simultáneamente la filas i y j entre sí, y las columnas i y j (se están intercambiando los papeles de las variables x_i y x_j). Una matriz y la obtenida al reordenarla son semejantes.

He aquí una serie de condiciones necesarias importantes:

- Si A es definida positiva $|A| > 0$.
- Si A es de dimensión n, y es definida negativa, $|A|$ tiene el signo de $(-1)^n$.
- Los menores preferentes de una forma cuadrática definida (positiva o negativa) son no nulos. En concreto:

- Cada submatriz preferente de una matriz definida positiva es también definida positiva.
- Cada submatriz preferente de una matriz definida negativa es también definida negativa.

Las formas cuadráticas definidas (positivas o negativas) quedan caracterizadas por los siguientes resultados:

- [1] Una forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}$ es definida positiva si y sólo si, todos los menores preferentes de órdenes 1, 2,..., n son mayores que cero.
- [2] Una forma cuadrática será definida negativa si y sólo si, los menores preferentes de orden k tienen el signo $(-1)^k$.

Atendiendo a menores preferentes hasta el momento no hemos dicho nada de los casos en que algún menor preferente sea nulo. Por el momento, el criterio de los menores preferentes no determina totalmente el carácter de la forma cuadrática.

Por ejemplo, si se intenta clasificar las matrices $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se observa que el signo de los menores preferentes es: + 0 0, y sin embargo la primera matriz es semidefinida positiva (autovalores 0,1,10) y la segunda es indefinida (0, $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$).

Veamos unos resultados que permiten subsanar este problema:

Teorema [3]: Una forma cuadrática es semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ todos los menores preferentes, bajo cualquier transformación fila-columna, son mayores o iguales que cero

Teorema [4]: Una forma cuadrática es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ los menores preferentes tienen el signo: $\text{signo}(D_k)=\text{signo}(-1)^k$, $k=1..n$ o son nulos, bajo cualquier transformación fila-columna.

En cualquier otro caso distinto de [1], [2], [3] y[4] , la forma cuadrática es es indefinida.

Como se ve tras los dos últimos resultados, en algunos casos habría que hacer comprobaciones bajo cualquier transformación fila-columna, con lo engorroso que ello puede resultar. Otros resultados útiles (condiciones suficientes) a la hora de clasificar una matriz simétrica utilizando menores preferentes (que en ciertas ocasiones evitarán comprobaciones sobre las diferentes reordenaciones) son:

a. Los menores preferentes de orden menor o igual que n-1 son positivos y $|A|=0$ $\Rightarrow$ Q semidefinida positiva.

b. Los menores preferentes de orden impar menor o igual que n-1 son negativos, de orden par menor o igual que n-1 son positivos, y $|A|=0$ $\Rightarrow$ Q semidefinida negativa.

c. Si existe un menor (determinante de una submatriz) formado por un número par de líneas[1] es negativo$\Rightarrow$ Q es indefinida (D/ reordenando adecuadamente se está ante un menor preferente de orden par)

d. Si existen dos menores formados por un número impar de líneas[1], de forma que uno sea negativo y el otro positivo$\Rightarrow$ Q es indefinida

En resumen:

+ + + + +	definida positiva	+ + + + + 0	semidefinida
- + - + - +…	definida negativa	- + -...+ - 0 ó - + -...+ 0	semidefinida
- + +	indefinida	- + - - etcétera	indefinida
+ + 0 0 - + - + 0 0	**¿?**	**Reordenar** O bien llegando a la indefinición O bien todas las reordenaciones posibles	

Cuando se nos planten casos dudosos (casos distintos de los que aparecen en las dos primeras líneas del cuadro), una posibilidad que tenemos es realizar reordenaciones y llegar a alguno de los casos anteriores.

[1] De forma que el índice de las filas y las columnas sea el mismo: si se escogen las filas $i_1, ..., i_r$, se esocogen las mismas columnas.