T1. OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES EN VARIAS VARIABLES

1.1 Optimización clásica libre: optimización sin restricciones

En la optimización sin restricciones las variables de decisión pueden tomar cualquier valor. Sin embargo en la práctica esta situación no suele pasar ya que por naturaleza en los problemas económicos las variables han de cumplir algunas restricciones.

Aun así, en ocasiones es posible abordar la resolución de un programa con restricciones haciendo uso de las técnicas propias de los programas sin restricciones (algunos programas con restricciones de igualdad son equivalentes a programas sin restricciones).

Esto sucede cuando las restricciones nos permiten explicitar algunas de las variables de decisión y sustituirlas en la función objetivo.

1.2 Optimización de funciones de dos variables

El objetivo de este punto es desarrollar un procedimiento para encontrar los valores extremos de una función objetivo con dos variables de elección.

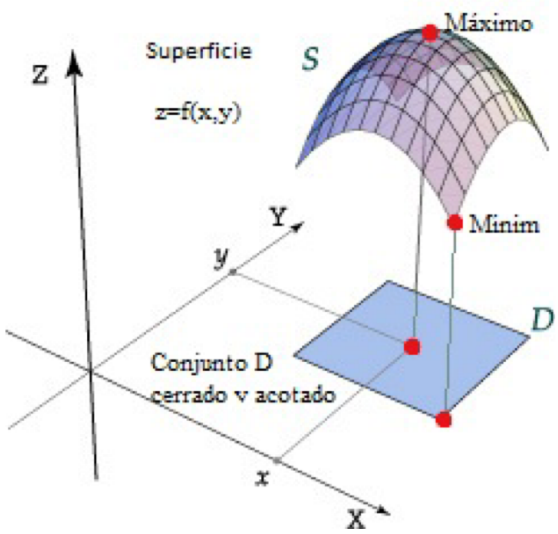
$z = f(x,y)$

Procedimiento	- Primero estudiaremos como encontrar los extremos relativos de $z=f(x,y)$ que es posible representar gráficamente. - Posteriormente podemos generalizar los resultados para el caso de variables que no es posible representar gráficamente.
	- Cualquiera que sea el número de variables, supondremos que la función objetivo posee derivadas parciales continuas de cualquier orden. Con lo que nos aseguramos la continuidad y la diferenciabilidad de la función objetivo.

1.2.1 Extremos absolutos

Supongamos una función continua $f(x,y)$, definida en un conjunto D y acotado en el plano $X0Y$.

En la siguiente figura se podrá ver que existen puntos z en que es más alta o más baja que el resto de los puntos, el valor que toma la función en dichos puntos es un **extremo.**



TEOREMA DEL VALOR EXTREMO: EXTREMOS ABSOLUTOS

Teorema del valor extremo: Extremos absolutos (extremos globales)	- Sea $f(x,y)$ una función continua de dos variables definida en un conjunto D cerrado y acotado en el plano $X0Y$:
	- ***1. Máximo absoluto***: Existe un punto (x_0,y_0) en D donde f alcanza un máximo absoluto cumpliéndose que: $$f(x_0,y_0)\geq f(x,y), \forall (x,y)\in D$$
	- ***2. Mínimo absoluto***: Existe un punto (x_0,y_0) en D donde f alcanza un mínimo absoluto cumpliéndose que: $$f(x_0,y_0)\leq f(x,y), \forall (x,y)\in D$$

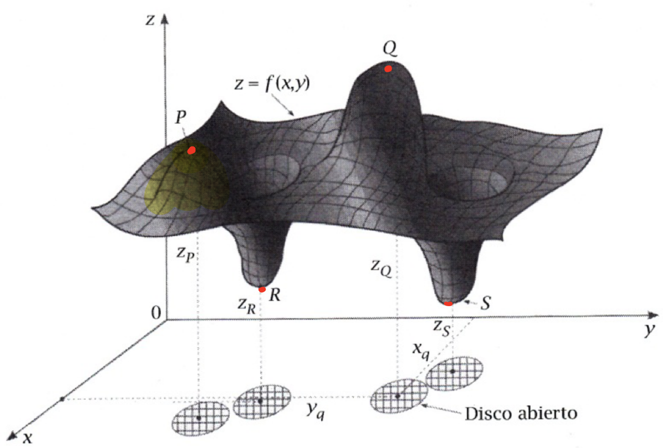
Extremos absolutos estrictos	- Cuando los extremos son $>$ o $<$; es decir, sustituyendo en las expresiones a $\geq$ o $\leq$.

1.2.2 Definición de extremos relativos

Extremos relativos (extremos locales)	- Sea $f(x,y)$ función definida en conjunto D que contiene el punto (x_0,y_0) , se dice:
	- ***1. Máximo relativo***: La función f tiene un máximo relativo en (x_0,y_0) si $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ estando los puntos (x,y) en el entorno (disco abierto) que contiene (x_0,y_0)
	- ***2. Mínimo relativo***: La función f tiene un mínimo relativo en (x_0,y_0) si $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ estando los puntos (x,y) en el entorno (disco abierto) que contiene (x_0,y_0)

EJEMPLO GRÁFICO

La siguiente figura representa la función $z=f(x,y)$ donde se puede apreciar varios máximos y mínimos relativos

Máximos relativos: $P(x_p,y_p,z_p)$ $Q(x_q,y_q,z_q)$ Mínimos relativos: $R(x_r,y_r,z_r)$ $S(x_s,y_s,z_s)$	

Para hallar los extremos relativos de f han de investigarse los llamados puntos críticos. Recordemos las funciones de una variable en las que un punto x_0 tal que $f'(x_0)=0$ (o no existía) era un punto crítico. Esto es extensible también a funciones de dos variables.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

1.2.3 Definición de puntos críticos

Puntos críticos o puntos estacionarios	- Sea f una función definida en R que contiene (x_0, y_0), dicho punto es crítico de f si se verifica una de las dos siguientes posibilidades
	- **1.** $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ - **2.** $f'_x(x_0, y_0)$ ó $f_y'(x_0, y_0)$ no existe

TEOREMA

Extremos relativos y puntos críticos	- Los extremos relativos solo pueden representarse en puntos críticos, pero no todos los puntos críticos son extremos relativos.
	- Si f presenta en (x_0, y_0) un extremo relativo en R - Entonces dicho punto es necesariamente un punto crítico de f.

EJERCICIO 1

Calcular los extremos relativos de

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 \longrightarrow z = f(1,2) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 2x - 2 = 0 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 2y - 4 = 0 \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = \frac{4}{2} = 2$$

$P(1,2)$

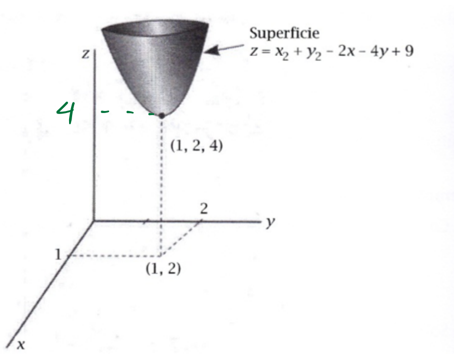
$$f(x,y) = \underbrace{(x-1)^2}_{x^2+1-2x} + \underbrace{(y-2)^2}_{y^2+4-4y} + 4$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{x^2+y^2-2x-4y+5}$$

$\longrightarrow$ Para todo $(x,y) = (1,2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y) > 4$

$P(1,2)$ hay un mínimo



INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

EJERCICIO 2

Calcular los extremos relativos de

$$f(x,y)=2-(x^2+y^2)^{2/3}$$

$x^2 \to 2x^{2-1}$

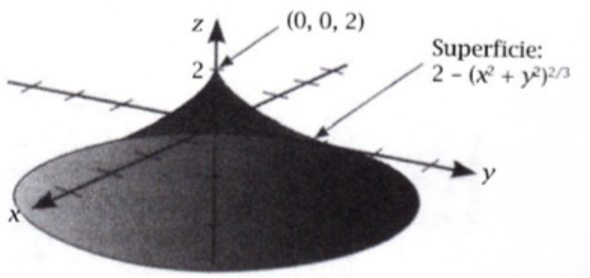
$\frac{2}{3}-1=\frac{2-3}{3}=\frac{-1}{3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-1/3}\cdot 2x=\frac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}}=0 \to 4x=0 \to x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-1/3}\cdot 2y=\frac{4y}{3(x^2+y^2)^{1/3}}=0 \to 4y=0 \to y=0$$

$P(0,0)$

$f(0,0)=2 \to f(x,y)<2 \to$ $P(0,0)$ hay un máximo relativo

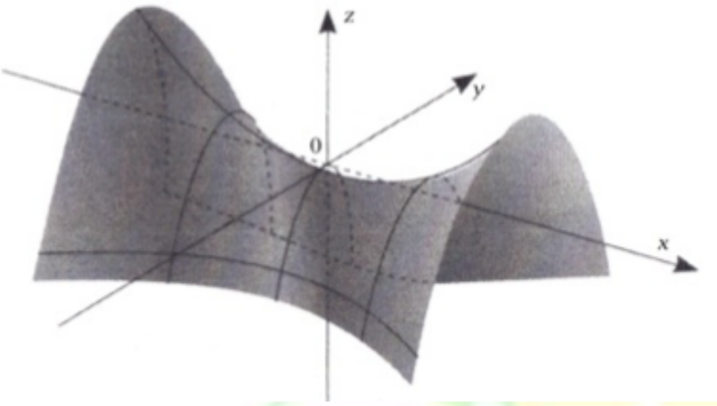


INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

Punto de silla (o ensilladura)

Puntos de silla	- Es cuando un punto crítico no es ni máximo relativo, ni mínimo relativo. $z=f(x,y)=x^2-y^2\,(paraboloide\ hiperbólico)$
	- Calculamos las derivadas parciales para encontrar los puntos críticos: $\begin{cases} f'_x=2x=0 \rightarrow x=0 \\ f'_y=2y=0 \rightarrow y=0 \end{cases}$ - En el punto $(0,0)$ las dos derivadas son nulas. - Pero no tiene extremo relativo en $(0,0)$. - En efecto, si calculamos puntos diferentes: $f(x,0)=x^2 \rightarrow indica\ que\ f(x,y)\ toma\ valores\ positivos\ en\ cualquier\ punto$ $f(0,y)=-y^2 \rightarrow indica\ que\ f(x,y)\ toma\ valores\ negativos\ en\ cualquier\ punto$



En los ejemplos anteriores ha sido fácil obtener los extremos relativos ya que se podían expresar fácilmente en forma de cuadrado perfecto y obtener conclusiones.

Para funciones más complicadas se tendrá que instrumentar un procedimiento analítico más potente basado en el criterio de las derivadas segundas.

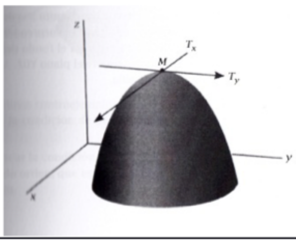
Pero antes demostraremos formalmente cuales son las condiciones necesarias de primer orden en la búsqueda de valores extremos de una función de dos variables.

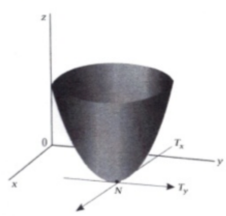
INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

1.3 Condiciones necesarias (de primer orden) para los valores extremos de una función de dos variables

Condición necesaria de primer orden	- Una función $z=f(x,y)$ exige que $dz=0$ - Al existir dos variables independientes x e y la dz es una diferencial total: $dz=f'_x dx+f'_y dy$
	- Para que la condición $dz=0$ se cumpla, es necesario y suficiente que ambas derivadas parciales f'_x y f'_y se anulen simultáneamente.
	- Por tanto, la condición de primer orden es $f'_x=f'_y=0$ *o lo que es igual* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Interpretación geométrica de la condición de primer orden

Punto máximo	- El **Punto máximo** M de $f'_x=0$ señala que la **recta tangente** T_x a través de M y paralela al plano $X0Z$ (permaneciendo y constante) tiene **pendiente cero.** - El **Punto Máximo** M de $f'_y=0$ señala que la **recta tangente** T_y a través de M y paralela al plano $Y0Z$ (permaneciendo z constante) tiene **pendiente cero.**
	

Punto mínimo	- Igualmente se dan requisitos de **pendiente cero** en un **punto mínimo** N
	

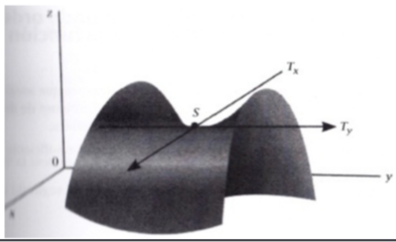
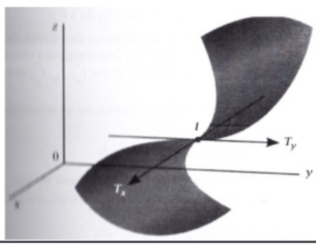
INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

¿Pero es condición suficiente? NO

La condición de primer orden es condición necesaria, pero no suficiente.

Condición necesaria pero no suficiente	- En ambos gráficos anteriores vemos que $dz=0$ o $f'_x=f'_y=0$ - La condición de primer orden es condición necesaria, pero no suficiente.

En los gráficos posteriores vemos que pueden ser puntos de silla o de inflexión.

Puntos de silla o de inflexión	- En el siguiente gráfico se puede ver que en el punto S las tangentes T_x y T_Y que tienen pendiente nula. - El punto S aparece como un máximo contra el fondo del plano $X0Z$. - El punto S aparece como un mínimo contra el fondo del plano $Y0Z$. - Este punto con "doble personalidad" se le llama punto de silla. 
	- En el siguiente gráfico también se puede ver el punto I con tangentes T_x y T_y nulas. - Y aparece también como punto de silla 

¿Cómo buscar la condición suficiente ?

Para poder buscar la condición suficiente se tendrá que efectuar a través de la diferencial de segundo orden, que está expresada en función de las derivadas parciales de segundo orden.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

1.4 Condiciones suficientes (de segundo orden) para los valores extremos de una función de dos variables

<table>
<tr>
<td rowspan="4">Condición suficiente de segundo orden</td>
<td>- Obtendremos la diferencial total de segundo orden $d^2 z$ diferenciando dz .</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=f'_x dx+f'_y dy$$

- Recordar que dz depende sólo de f'_x y f'_y , que éstas son a su vez funciones de x e y
- Y que por tanto, resulta que dz sólo es función de x e y .

</td>
</tr>
<tr>
<td>

- La $d^2 z$ nos expresa el cambio en dz en términos de valores dados de dx y dy .
- Por lo que para obtener $d^2 z$ se tendrá que calcular las derivadas parciales de segundo orden $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ todas ellas evaluadas en (x_0, y_0) :

$$d^2 z=d(dz)=\frac{\partial(dz)}{\partial x}dx+\frac{\partial(dz)}{dy}dy$$

$$Si\ dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\ entonces:$$

$$d^2 z=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy$$

$$d^2 z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}dy\right)dy$$

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}d x^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}d y^2$$

- Aplicando el teorema de *Shwarz:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

- Tenemos que:

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}d x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}d y^2$$

$$d^2 z=(dy)^2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(\frac{dx}{dy}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

- Para la existencia de un máximo o un mínimo relativo se requiere

$$d^2 z \neq 0$$

- Por tanto, el término entre corchetes ha de ser diferente de 0, o equivale a decir que la ecuación cuadrática en dx/dy no tenga soluciones reales:

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(\frac{dx}{dy}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]=0$$

- Análogo si $a x^2+bx+c=0$ exigimos no tenga raíces reales y equivale a $b^2<4ac$.

</td>
</tr>
</table>

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

	- Así que la condición $d^2z \neq 0$ exige que $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; o\, bien\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$ - O lo que es lo mismo $f''_{x^2}\cdot f''_{y^2} > (f''_{xy})$
	- Si además queremos asegurar que sea un máximo relativo, entonces: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0\; y\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$
Condición $d^2z \neq 0$	- Y si queremos que sea un mínimo relativo, entonces: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0\; y\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$
	- En términos de diferencial segunda: - ***Máximo relativo***: $d^2z < 0$ para valores arbitrarios dx y dy ambos no nulos. - ***Mínimo relativo***: $d^2z > 0$ para valores arbitrarios dx y dy ambos no nulos. $d^2z \begin{cases} > 0\, si\, f''_{x^2} > 0, f''_{y^2} > 0, f''_{x^2} f''_{y^2} > (f''_{xy})^2 \\ < 0\, si\, f''_{x^2} < 0, f''_{y^2} < 0, f''_{x^2} f''_{y^2} > (f''_{xy})^2 \end{cases}$
	- Vemos que $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2$ es el determinante de la matriz Hessiana de $f(x,y)$.
Determinante de la Matriz Hessiana	- Matriz Hessiana: $Hf = \begin{bmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{bmatrix}$ - Donde f'_{x^2} es su primer menor principal h_1 - El segundo menor principal h_2 $h_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix} = f''_{x^2}\cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2$

Matriz Hessiana

$$H_f = \begin{bmatrix} \boxed{f''_{x^2}} & f'_{xy} \\ f'_{yx} & f''_{y^2} \end{bmatrix}$$

$f'_{xy} = f'_{yx}$

$h_1 = f''_{x^2}$

$h_2 = f''_{x^2}\cdot f''_{y^2} - (f'_{xy})^2$

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

<table>
<tr><td rowspan="4">Condición suficiente de segundo orden pero no condición necesaria de extremo</td><td>- La condición suficiente de segundo orden sería $\left\{f''_{x^2} f''_{y^2} - \left[f''_{xy}\right]^2\right\}$
- Pero no es condición necesaria de extremo.</td></tr>
<tr><td>- Si un punto crítico donde $(f'_x=0, f'_y=0)$ viola la condición anterior y cumple: $f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} = \left(f''_{xy}\right)^2$
- Puede ser que ese punto llegue a ser un extremo representando un caso dudoso, estando ante un caso de Hessiano nulo $H=h_2=0$.</td></tr>
<tr><td>- Si un punto crítico donde $(f'_x=0, f'_y=0)$ viola la condición anterior y cumple: $f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} < \left(f''_{xy}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>- Este será punto de silla y equivale a que $h_2<0$ no habiendo extremo relativo.</td></tr>
<tr><td></td><td>- El signo de $d^2 z$ no estará definido, habrá signo positivo para algunos valores de dx y dy , pero habrá signo negativo para otros.</td></tr>
</table>

Resumen: condición suficiente segundo orden

La condición suficiente de segundo orden para la existencia de extremos consiste en que $h_2>0$ y que h_1 :

<table>
<tr><td rowspan="2">$h_2>0$</td><td>$h_1=f''_{x^2}<0$</td><td>Máximo relativo</td></tr>
<tr><td>$h_1=f''_{x^2}>0$</td><td>Mínimo relativo</td></tr>
<tr><td>$h_2=0$</td><td colspan="2">Caso dudoso. Donde no llega a ninguna conclusión</td></tr>
<tr><td>$h_2<0$</td><td colspan="2">Punto de silla. No hay extremo</td></tr>
</table>

Si $h_2>0$, $f''_{x^2}(x_0, y_0)$ y $f''_{y^2}(x_0, y_0)$ han de tener el mismo signo, y por tanto f''_{x^2} puede ser reemplazada por f''_{y^2} .

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

1.5 procedimiento práctico para obtener los extremos de una función de dos variables

1. Obtener las derivadas parciales primeras	$\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$		
2. Igualar a cero las derivadas parciales primeras y resolver el sistema	$\left.\begin{matrix}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{matrix}\right\}$		
3. Hallar las derivadas parciales segundas para obtener la matriz Hessiana	$Hf=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{bmatrix}$		
4. Particularizamos la matriz Hessiana para cada uno de los posibles puntos que pueden ser extremos obtenidos en el segundo paso. Si consideramos el punto (x_1, y_2)	$Hf(x_1,y_1)=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}\\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}\end{bmatrix}$		
4.1 Primer caso (existe máximo en $(x_1 y_1)$)	Menores principales	$\left.\begin{matrix}h_1=\left\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}<0\\ h_2(x_1,y_1)>0\end{matrix}\right\}$	Existe máximo
4.2 Segundo caso (existe mínimo en (x_1, y_1))	Menores principales	$\left.\begin{matrix}h_1=\left\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}>0\\ h_2(x_1,y_1)>0\end{matrix}\right\}$	existe mínimo
4.3 Tercer caso (punto de silla en (x_1, y_1))	Menores principales	$\left.\begin{matrix}h_1=\left\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}>\text{¿}0\\ h_2(x_1 . y_1)<0\end{matrix}\right\}$	punto de silla
4.4 Cuarto caso (caso dudoso o indeterminado en (x_1, y_1))	Menores principales	$\left.\begin{matrix}h_1=\left\|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}>\text{¿}0\\ h_2(x_1,y_1)=0\end{matrix}\right\}$	caso dudoso
5 Cada valor extremo obtenido, se sustituye en $z=f(x,y)$ obteniendo el valor de la coordenada z .			

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

EJERCICIO 3

Obtener los extremos de la función:

$$z = x^3 + y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 6$$

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4x$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 8y$

2. $3x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(3x+4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4/3 \end{cases}$

$3y^2 + 8y = 0 \rightarrow y(3y+8) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = -8/3 \end{cases}$

Puntos críticos $\begin{cases} (0,0) \\ (0, -8/3) \\ (-4/3, 0) \\ (-4/3, -8/3) \end{cases}$

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 4$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 8$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$ $\quad \}=$

$$H_f = \begin{bmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & 6y+8 \end{bmatrix}$$

ADEFACIL
INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

4.

$P(0,0)$

$$Hf_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$h_2 = 4 \cdot 8 - 0 \cdot 0 > 0$
$h_1 = 4 > 0$

En el $P(0,0)$ existe un mínimo

$P(0, -8/3)$

$$Hf_{(0,-8/3)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$h_2 = 4(-8) - 0 \cdot 0 < 0$
$h_1 = 4 > 0$

No existe extremo

$\downarrow$

$P(0, -8/3)$ hay un punto de silla

$6\left(-\frac{8}{3}\right)+8 = -\frac{48+24}{3} = \frac{-24}{3} = -8$

$P(-4/3, 0)$

$$Hf_{(-4/3,0)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$h_2 = (-4)(8) - 0 \cdot 0 < 0$
$h_1 = -4 < 0$

No existe extremo

$\downarrow$

$P(-4/3, 0)$ hay un punto de silla

$P(-4/3, -8/3)$

$$Hf_{(-4/3,-8/3)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$h_2 = (-4)(-8) - 0 \cdot 0 > 0$
$h_1 = -4 < 0$

$P(-4/3, -8/3)$ hay un máximo relativo

ADEFACIL
INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

EJERCICIO 4: Estudio de un caso dudoso

Obtener los extremos de la función:

$f(x,y)=x^2+y^3-xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y^2 = 0 \rightarrow 2x = y^2 \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2xy = 0 \rightarrow 3y^2 - \cancel{2}\frac{y^2}{\cancel{2}}\cdot y = 0 \rightarrow 3y^2 - y^3 = 0$$

$$3y^2 - y^3 = y^2(3-y) = 0 \begin{cases} y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \\ 3 - y = 0 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$$y = 0 \rightarrow x = \frac{y^2}{2} = 0 \rightarrow P(0,0)$$

$$y = 3 \rightarrow x = \frac{9}{2} \rightarrow P(9/2, 3)$$

2ª Derivadas

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & -2y \\ -2y & 6y - 2x \end{bmatrix}$$

$$P(0,0) \rightarrow Hf_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad h_2 = 2\cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

CASO DUDOSO

$$P(9/2, 3) \rightarrow Hf_{(9/2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \quad h_2 = 2\cdot 9 - (-6)(-6) < 0$$

$\downarrow$

Punto silla

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

1.6 Extremos relativos de funciones de n variables

En este punto vamos a extrapolar a n variables para hacer el análisis de extremos libres.

Aquí existen dos posibilidades, según que la función esté dada en forma explícita o en forma implícita.

Funciones en forma explícita

Analizaremos únicamente las funciones dadas en forma explícita.
Sea una función $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cuyas derivadas segundas son continuas y no simultáneamente nulas.

Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

De la función siguiente z	$z=f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$
Hallar la existencia de extremo en un punto c	$c=\left(c_1, c\text{¿}_2, \dots, c_n\right)$
Situado este punto c en el espacio n -dimensional	$n-dimensiones$
La condición necesaria es que las derivadas parciales primeras respecto de cada variable x_i sean nulas en el punto c . Es decir:	$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_c=0, \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_c=0, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_c=0$

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

Condición suficiente para la existencia de óptimos locales

Se ha de formar la matriz **Hessiana**	$Hf=\begin{bmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & \dots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & \dots & f''_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \dots & f''_{x_nx_n} \end{bmatrix} siendo\, f''_{x_ix_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}; \forall i,j=1,2,\dots,n$

En base a los criterios de clasificación de formas cuadráticas en las variables $x_1,x_2,\dots,x_n$ y si llamamos $h_1,h_2,\dots,h_n$ a los menores principales de la matriz Hessiana Hf tendremos:	
Mínimo local estricto	Si la matriz Hessiana de f es definida positiva en un punto crítico de c de f (menores principales de Hf positivos: $h_i>0\,\forall\, i=1,2,\dots,n$) entonces f presenta un mínimo local estricto en el punto c.
Máximo local estricto	Si la matriz Hessiana de f es definida negativa en un punto crítico c de f (menores principales de Hf alternan el signo, siendo el primero de ellos negativo: $h_1<0, h_2>0, h_3<0,\dots$), entonces f presenta un máximo local estricto en el punto c.
Punto de silla	Si la matriz Hessiana de f resulta ser indefinida (no se cumple ninguna de las dos condiciones anteriores y $h_n\neq 0$), entonces f presenta un punto de silla en el punto c.
Casos dudoso	En cualquier otro caso (diferente a los tres anteriores) estamos en presencia de un caso dudoso o indeterminado (p.e. si algunos menores h_i son cero, pero el orden de los restantes no se altera).
Si la matriz Hessiana de f resulta ser indefinida (no se cumple ninguna de las dos condiciones anteriores y $h_n\neq 0$), entonces f presenta un punto de silla en el punto c	

3 variables

Hf es definida Positiva $\left\{\begin{array}{l} h_3>0 \\ h_2>0 \\ h_1>0 \end{array}\right\}$ Mínimo local estricto

Hf es definida Negativa $\left\{\begin{array}{l} h_3<0 \\ h_2>0 \\ h_1<0 \end{array}\right\}$ Máximo local estricto

$Hf \rightarrow$ no casos anteriores y $hi\neq 0 \Rightarrow$ Punto de silla

$Hf \rightarrow hi=0 \rightarrow$ Caso dudoso

EJERCICIO 5

Hallar los extremos relativos de la función:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-xy+xz-z^2+2z$$

$$f'_x = 2x - y + z = 0 \quad (1)$$
$$f'_y = 2y - x = 0 \longrightarrow x = 2y$$
$$f'_z = x - 2z + 2 = 0 \quad (3)$$

(1) $2\cdot 2y - y + z = 0 \longrightarrow 3y + z = 0 \longrightarrow z = -3y$

(3) $2y - 2z + 2 = 0 \longrightarrow 2y - 2z = -2$

$2y - 2(-3y) = -2$

$2y + 6y = -2 \longrightarrow 8y = -2$

$y = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -\tfrac{1}{4} \\ x &= 2y = 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{2}{4} = -\tfrac{1}{2} \\ z &= -3y = -3\left(-\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{3}{4} \end{aligned}}$$

$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$f''_x = 2 \quad f''_{xy} = -1 \quad f''_{xz} = 1$

$f''_{yx} = -1 \quad f''_y = 2 \quad f''_{yz} = 0$

$f''_{zx} = 1 \quad f''_{zy} = 0 \quad f''_z = -2$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$h_1 = 2 > 0$

$h_2 = 2\cdot 2 - 1 = 3 > 0$

$h_3 = -8 - \cancel{2} - (-\cancel{2}) = -8 < 0$

Punto de silla

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

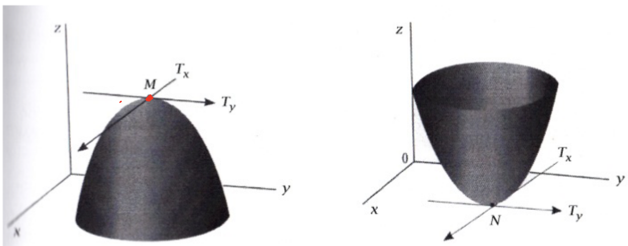
1.7 Optimalidad Global

Ahora ya tenemos las herramientas necesarias para encontrar los óptimos locales en una función cualquiera, sin restricciones sin embargo son las soluciones óptimas globales las que verdaderamente interesan en el entorno económico.

¿Qué utilidad podría tener disponer de un máximo local de la función de beneficios cuando es posible que exista otro máximo local que proporcione un mayor beneficio?

Con esta pregunta queda claro que lo **verdaderamente útil** será disponer de criterios adicionales que aseguren que el óptimo encontrado, ya sea máximo o mínimo, es **global**.

1.7.1 Condiciones de segundo orden en relación con la concavidad y convexidad

Funciones estrictamente cóncavas y estrictamente convexas	

Extremo de función cóncava	- Un extremo de una función cóncava debe ser una cúspide, un máximo. - Ha de ser máximo global, puesto que la colina abarca todo el dominio.
Concavidad estricta y máximo global único	- Sin embargo ese máximo global puede no ser el único ya que podría tener varios máximos si la colina contiene una parte superior horizontal plana. - Pero si hablamos de concavidad estricta, entonces la cúspide constará de un solo punto y el máximo global será único.

Extremo de función convexa	- Un extremo de una función convexa debe ser un mínimo. - Ha de ser mínimo global, puesto que el valle abarca todo el dominio.
Concavidad estricta y ~~máximo~~ mínimo global único	- Sin embargo ese mínimo global puede no ser el único ya que podría tener varios mínimos si el valle contiene una parte inferior horizontal plana. - Pero si hablamos de concavidad estricta, entonces la cúspide constará de un solo punto y el ~~máximo~~ mínimo global será único.

d^2z	- En epígrafes anteriores a través de los menores principales se podía localizar los máximos y mínimos relativos o locales. - No obstante puede suceder que d^2z tenga un signo definido en todas partes; por lo que en este caso la colina o valle deberá abarcar todo el dominio y entonces el máximo o mínimo hallado sería de naturaleza global.

ADEFACIL

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

Posible concavidad o convexidad a través de la Matriz Hessiana

- Considerando una función $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ definida en un conjunto abierto y convexo que es dos veces diferenciable en forma continua (para esta función existen derivadas parciales de segundo orden, por lo que d^2z está definida).
- Y por tanto nos permite averiguar la posible concavidad o convexidad de la función a partir del signo de la forma cuadrática d^2z generada por su matriz Hessiana:

1. Estrictamente convexa	- Si la matriz Hessiana de f es **definida positiva** en todo el dominio (es decir, **menores principales** de Hf positivos: $h_i>0\ \forall\ i=1,2,\ldots,n$) entonces f es estrictamente convexa.
2. Estrictamente cóncava	- Si la matriz Hessiana de f es **definida negativa** en todo el dominio (es decir, **menores principales** de Hf alternarán el signo, siendo el primero de ellos negativo: $h_1<0, h_2>0, h_3<0,\ldots$¿ entonces f es estrictamente cóncava.
3. Convexa	- Si la matriz Hessiana de f es **semidefinida** positiva en todo el dominio (es decir, **menores principales** de H_f cumplen: $h_i>0\ \forall\ i=1,2,\ldots,n-1\ y\ h_n=0$) entonces, f es convexa.
4. Cóncava	- Si la matriz Hessiana de f es **semidefinida negativa** en todo el dominio (**menores principales** de H_f cumplen: $h_1<0, h_2>0, h_3<0,\ldots\ \forall\ i=1,2,\ldots,n-1\ y\ h_n=0$¿ entonces f es cóncava.

En los puntos 3 y 4 el recíproco también se cumple, no así en los puntos 1 y 2.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

Teorema Local - Global

Máximo/Mínimo global	- Si una función f es **continua y convexa** (cóncava) en un conjunto factible convexo, entonces **todo mínimo** (máximo) **local** de la función, **es global**.
Máximo/Mínimo global estricto	- **Además si** f **es estrictamente convexa** (cóncava), entonces **todo mínimo** (máximo) **local es** un mínimo (máximo) **global estricto**.
Determinación de los óptimos globales	- Por consiguiente, la determinación de los óptimos globales en un problema de optimización **irá ligado a la convexidad** (concavidad) **de la función objetivo y la convexidad de la región** factible.
	- Ahora bien, dado que en un problema de optimización libre **la región factible coincide en la mayoría de los casos con todo el espacio** n **-dimensional** R^n que es **convexo**, **la única condición que requerimos** en estos casos para la optimalidad global **es la convexidad** (concavidad) **de la función que se desea minimizar** (maximizar) **en cualquier punto de la región factible** D .

Concretando el teorema de global y estricto:

Mínimo global estricto	- Si $\forall x \in D$ la matriz **Hessiana de** f **es definida positiva** entonces el único punto crítico de f es su mínimo global estricto.
Máximo global estricto	- Si $\forall x \in D$ la matriz **Hessiana de** f **es definida negativa** entonces el único punto crítico de f es su máximo global estricto
Mínimo global	- Si $\forall x \in D$ la matriz **Hessiana de** f **es semidefinida positiva** entonces el único punto crítico de f es mínimo global.
Máximo global	- Si $\forall x \in D$ la matriz **Hessiana de** f **es semidefinida negativa** entonces el único punto crítico de f es máximo global.

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

EJERCICIO 6

Dada la siguiente función, identificar sus puntos críticos y clasificarlos como mínimo, máximos o puntos de silla. Los óptimos encontrados ¿son globales?

$$f\left(\overset{x}{x_1},\overset{y}{x_2},\overset{z}{x_3}\right)=x+2y+yz-x^2-y^2-z^2$$

Condiciones necesarias

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = 1/2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 + z - 2y = 0 \rightarrow z = +2y-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y - 2z = 0 \rightarrow z = \frac{y}{2}$$

$$2y - 2 = \frac{y}{2}$$

$$4y - 4 = y$$

$$3y = 4 \rightarrow y = 4/3$$

$x = 1/2$

$y = 4/3$

$$z = y/2 = \frac{4/3}{2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$P(1/2,\ 4/3,\ 2/3)$

$$Hf = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$h_1 = -2 < 0$

$h_2 = 4 > 0$

$h_3 = -8 - (-2) = -6 < 0$

Definida negativa
↓
f estrictamente cóncava
↓
Máximo Global estricto

$P(1/2,\ 4/3,\ 2/3)$ hay un máximo global estricto

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871