INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

# T1. EJERCICIOS: OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

## EJERCICIO 1

Sea una empresa que produce tres bienes cuyos precios de mercado en competencia perfecta son $p_1 = 16$, $p_2 = 12$ y $p_3 = 20$. Su función de costes es:

$$C(q_1, q_2, q_3) = q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2 + 2q_1q_3 + 25,$$

donde $q_1$, $q_2$ y $q_3$ representan las cantidades producidas de cada uno de los tres bienes.
Obténgase los valores de $q_1$, $q_2$ y $q_3$ que maximizan el beneficio de la empresa.

$$B^o = \text{Ingresos} - \text{Costes} =$$

$$= 16q_1 + 12q_2 + 20 \cdot q_3 - (q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2 + 2q_1q_3 + 25) =$$

$$= 16q_1 + 12q_2 + 20q_3 - q_1^2 - 2q_2^2 - 3q_3^2 - 2q_1 \cdot q_3 - 25$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial B^o}{\partial q_1} &= 16 - 2q_1 - 2q_3 = 0 \\ \frac{\partial B^o}{\partial q_2} &= 12 - 2 \cdot 2q_2 = 12 - 4q_2 = 0 \\ \frac{\partial B^o}{\partial q_3} &= 20 - 3 \cdot 2q_3 - 2q_1 = 20 - 6q_3 - 2q_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 1)\ & 16 - 2q_1 - 2q_3 = 0 \\ & 12 - 4q_2 = 0 \\ 3)\ & 20 - 6q_3 - 2q_1 = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow 4q_2 = 12 \rightarrow q_2 = \frac{12}{4} = 3$$

$$\left.\begin{aligned} 1)\ & 16 - 2q_1 - 2q_3 = 0 \\ 3)\ & 20 - 6q_3 - 2q_1 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\longrightarrow 2q_1 = 16 - 2q_3 \rightarrow q_1 = \frac{16 - 2q_3}{2} \ * \\ &\longrightarrow 2q_1 = 20 - 6q_3 \rightarrow q_1 = \frac{20 - 6q_3}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{16 - 2q_3}{\cancel{2}} = \frac{20 - 6q_3}{\cancel{2}} \rightarrow 16 - 2q_3 = 20 - 6q_3$$

$$-2q_3 + 6q_3 = 20 - 16 \rightarrow 4q_3 = 4$$

$$q_3 = 1$$

$$* \ q_1 = \frac{16 - 2 \cdot 1}{2} = 7$$

$$\left\{\begin{aligned} q_1 &= 7 \\ q_2 &= 3 \\ q_3 &= 1 \end{aligned}\right.$$

ADEFACIL
INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

$$\frac{\partial B^o}{\partial q_1} = 16 - 2q_1 - 2q_3 = 0$$

$$\frac{\partial B^o}{\partial q_2} = 12 - 2\cdot 2q_2 = 12 - 4q_2 = 0$$

$$\frac{\partial B^o}{\partial q_3} = 20 - 3\cdot 2q_3 - 2q_1 = 20 - 6q_3 - 2q_1 = 0$$

---

$$\frac{\partial^2 B^o}{\partial q_1^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 B^o}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 B^o}{\partial q_1 \partial q_3} = -2$$

$$\frac{\partial^2 B^o}{\partial q_2 \partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 B^o}{\partial q_2^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 B^o}{\partial q_2 \partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B^o}{\partial q_3 \partial q_1} = -2 \qquad \frac{\partial^2 B^o}{\partial q_3 \partial q_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 B^o}{\partial q_3^2} = -6$$

$$Hf = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$h_1 = -2 < 0$$

$$h_2 = (-2)(-4) - 0 = 8 > 0$$

$$h_3 = -48 - (-16) = -32 < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 < 0 \\ h_2 > 0 \\ h_3 < 0 \end{array}\right\}$$

Definida negativa

Función cóncava $\rightarrow$ Máximo

$P(q_1 = 7,\ q_2 = 3,\ q_3 = 1)$

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

## EJERCICIO 2

Hallar los óptimos de la función: $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 2x - 2y = 0 \longrightarrow 2x = 2y \rightarrow x = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = -2x + 2y = 0 \longrightarrow 2x = 2y \rightarrow x = y$$

Solución: todos los puntos donde $x = y$

$$f''_x = 2 \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = -2 \qquad f''_y = 2$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$H_1 = 2 > 0$

$H_2 = 4 - (+4) = 0$

$\downarrow$

$H_2 = 0 \rightarrow$ CASO DUDOSO

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = \underbrace{(x-y)^2 \geq 0}$$

$\longrightarrow$ En cada punto $x = y$ existe un mínimo global

## EJERCICIO 3

Aplicando las condiciones de optimalidad, calcular los puntos $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ máximos relativos de la función:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 6.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 3x^2 + 4x = 0 \longrightarrow x(3x+4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 4 = 0 \rightarrow x = -4/3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 3y^2 + 8y = 0 \longrightarrow y(3y+8) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ 3y + 8 = 0 \rightarrow y = -8/3 \end{cases}$$

Los candidatos a extremos: $(0,0), (0, -8/3), (-4/3, 0), (-4/3, -8/3)$

$$f''_x = 6x + 4 \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = 0$$

$$f''_y = 6y + 8$$

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

$$Hf = \begin{bmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & 6y+8 \end{bmatrix}$$

Cada punto:

- $Hf_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} h_1 = 4 > 0 \\ h_2 = 4 \cdot 8 - 0 > 0 \end{array}\right\}$ Definida positiva. $f(x,y)$ tiene un mínimo relativo en $(0,0)$

- $Hf_{(0,-8/3)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} h_1 = 4 > 0 \\ h_2 = 4(-8) - 0 < 0 \end{array}\right\}$ Indefinida. $f(x,y)$ no tiene extremo en $(0, -8/3)$

  $6\left(\frac{-8}{3}\right) + 8 = \frac{-48+24}{3} = \frac{-24}{3} = -8$

- $Hf_{(-4/3, 0)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} h_1 = -4 < 0 \\ h_2 = -4 \cdot 8 - 0 < 0 \end{array}\right\}$ Indefinida. $f(x,y)$ no tiene extremo en $(-4/3, 0)$

- $Hf_{(-4/3, -8/3)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} h_1 = -4 < 0 \\ h_2 = (-4)(-8) - 0 > 0 \end{array}\right\}$ Definida negativa. $f(x,y)$ tiene un máximo relativo en $(-4/3, 8/3)$

**EJERCICIO 4**

Un agricultor utiliza como únicos factores para cultivar un campo trabajo y fertilizantes, siendo $x_1, x_2$ los costes de estos factores. Si el beneficio por unidad de superficie viene dado por: $B(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$

Encontrar los valores de $x_1, x_2$ que maximizan el beneficio.

$$B(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial B^o}{\partial x_1} = 20 + 4x_2 - 8x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial B^o}{\partial x_2} = 26 + 4x_1 - 6x_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = \dfrac{20+4x_2}{8} \\ \rightarrow x_1 = \dfrac{6x_2 - 26}{4} \end{array}$$

$$\frac{20+4x_2}{\cancel{8}\,2} = \frac{6x_2 - 26}{\cancel{4}\,1} \rightarrow 20 + 4x_2 = 12x_2 - 52$$

$$\left.\begin{array}{l} 8x_2 = 72 \rightarrow x_2 = \dfrac{72}{8} = 9 \\ x_1 = \dfrac{20 + 4\cdot 9}{8} = 7 \end{array}\right\} P(7, 9)$$

$$\frac{\partial^2 B^o}{\partial^2 x_1} = -8 \qquad \frac{\partial^2 B^o}{\partial x_1 \partial x_2} = 4$$

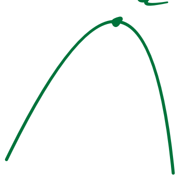
$$\frac{\partial^2 B^o}{\partial^2 x_2} = -6$$

$$H_f = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = -8 < 0 \\ h_2 = (-8)(-6) - 4\cdot 4 > 0 \end{array}\right\}$$

· Definida negativa

}· Estrictamente cóncava



· P(7,9) hay un máximo global

## EJERCICIO 5

Dada la siguiente función $f(x_1,x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_2 + 1$ identificar sus puntos críticos y clasificarlos como mínimos, máximos o puntos de silla. Los óptimos locales encontrados ¿son globales?

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -10x_2 + 4 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$P(0, 2/5)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -10$$

$$H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$h_1 = -2 < 0$

$h_2 = (-2)(-10) - 0 > 0$

Definida negativa
Estrictamente cóncava

$P(0, 2/5)$ hay un máximo global

ADEFACIL
INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

## EJERCICIO 6

Estudiar si es cóncava o convexa la función:

$$f(x, y) = -(x+1)^2 - y^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2(x+1)\cdot 1 = -2x-2 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} h_1 = -2 < 0 \\ h_2 = 4 - 0 > 0 \end{array}\right\}$$

Definida negativa
Estrictamente cóncava

## EJERCICIO 7

Estudiar si es cóncava o convexa la función:

$$f(x, y) = e^{(-x)} + e^{(-y)}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(e^{-x})\cdot(-1) = e^{-x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-y}(-1) = -e^{-y} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -(e^{-y})(-1) = e^{-y}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} h_1 = e^{-x} > 0 \\ h_2 = e^{-x}\cdot e^{-y} - 0 = e^{-x-y} > 0 \end{array}\right\}$$

Definida positiva
$\downarrow$
Estrictamente convexa

ADEFACIL

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

## EJERCICIO 8

Estudiar si es convexa sobre $\mathbb{R}^2$ la función:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - xy - x^3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 3x^2 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 6x$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - x \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2-6x & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Depende de x ⇒

⇒ No es cóncava ni convexa

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871