Elena Gonzalo
671 227 871

LAS MEDIDAS DE POSICIÓN EN DISTRIBUCIONES UNIDIMENSIONALES

* Medidas Posición Centradas
  - Media aritmética $\bar{x}$
  - Media Geométrica G
  - Media Armónica H
  - Mediana Me
  - Moda Mo

* Medidas Posición No Centradas → Cuantiles
  - Cuartiles Q_j
  - Deciles D_j
  - Percentiles P_j

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

* MEDIDAS POSICIÓN CENTRADAS

1) Media aritmética simple

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$ Distribución tipo I

2) Media aritmética ponderada

* Por frecuencias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \sum x_i \cdot f_i$$ Distribución tipo II

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \cdot n_i}{N}$$ Distribución tipo III

* Por coeficientes:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot w_i}{\sum w_i}$$ Distribuciones tipo I

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i \cdot w_i}{\sum n_i \cdot w_i}$$ Distribuciones tipo II y III

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

. Propiedades de la media aritmética

Propiedades:

- Si a todos los valores observados les sumamos una constante K (cambio de origen), la media de los nuevos valores se obtiene sumando a la media de los valores originales esta constante K.

$$X_A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \Rightarrow \overline{X}_A$$

$$X_B = \{x_1 + k, x_2 + k, \ldots, x_n + k\} \Rightarrow \overline{X}_B = \overline{X}_A + k$$

$\bar{x}$ $+k$ $\longrightarrow$ $\bar{y} = \bar{x} + k$

- Si todas las observaciones se multiplican o se dividen por una constante K (cambio de escala), la nueva media queda multiplicada o dividida por dicho número K.

$\bar{x}$ $\times k$ $\longrightarrow$ $\bar{y} = k\bar{x}$

- Como consecuencia de estas dos últimas propiedades, sí a la variable estadística x_i la sometemos al mismo tiempo a un *cambio de origen* O_t y a un *cambio de escala C* mediante la transformación $y_1 = \frac{x_i - O_t}{c}$, (siendo O_t y C constantes), resulta que: $\bar{x} = C\bar{y} + O_t$

$y = \frac{x_i - O_t}{c}$

Esta propiedad es bastante utilizada para la simplificación de los cálculos cuando los valores observados son muy elevados y tienen un máximo común divisor.

- La media de una constante es la misma constante. Es centro de gravedad de la distribución. La suma de las desviaciones de todos los valores respecto a su media aritmética es cero

$$\sum_{i=1}^{r} \left(Xi - \overline{X}\right) = 0. \quad \longrightarrow \quad \Sigma(x_i - \bar{x})n_i = 0$$

- La media es la cantidad que hace mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a un valor.

$\sum_{i=1}^{n} \left(Xi - \overline{X}\right)^2$: esta diferencia es mínima cuando la constante es la media aritmética.

Ventajas e inconvenientes de la media aritmética

Ventajas

- Se trata de un concepto familiar para la mayoría de las personas y es intuitivamente claro.
- Es calculable en todas las variables, es decir siempre que nuestras observaciones sean cuantitativas.
- Para su cálculo se utilizan todos los valores de la distribución.
- Es única para cada distribución de frecuencias.
- Tiene un claro significado, ya que al ser el centro de gravedad de la distribución representa todos los valores observados.
- Es útil para llevar a cabo procedimientos estadísticos como la comparación de medias de varios conjuntos de datos.

Inconvenientes

- Que es un valor muy sensible a los valores extremos, con lo que n las distribuciones con gran dispersión de datos puede llegar a perder totalmente su significado. → como utiliza todos los datos
- Que no es calculable cuando los parámetros son cualitativos.
- Podemos tener dificultades para su cálculo en distribuciones de tipo III con intervalos abiertos; en estos casos es necesario estimar una marca de clase para poder calcular la media y ésta nos varía sí cambiamos la marca de clase.

3) Mediana

50% 50%

x_{min} — Me — x_{max} → ordenar

Distribuciones tipo I

$$\boxed{- \text{ N es impar: } \quad Me = X_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}}$$

Ejemplo: nº hijos

N = 5 0, 2, 1, 1, 3

ordenar 0, 1, 1, 2, 3

Me

$$\boxed{- \text{ N es par: } \quad Me = \frac{X_{\left(\frac{N}{2}\right)} + X_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{2}}$$

Ejemplo: nº hijos

N = 6 0, 2, 1, 1, 3, 27

ordenar 0, 1, 1, 2, 3, 27

$$Me = \frac{1+2}{2} = 1'5$$

$$Me = \frac{X_3 + X_4}{2}$$

Elena Gonzalo
671 227 871

Distribuciones tipo II

Ejercicio 3.9. *Los siguientes datos corresponden a la superficie en hectáreas de una muestra de explotaciones agrarias de una determinada comarca.*

49 61 40 83 67 45 66 70 69 80 58 68 60 67 72 73 70 57
63 70 78 52 67 53 67 75 61 70 81 76 79 75 76 58 31 84.

a) Calcule la media y la mediana.

i	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$
1	31	1	1	31
2	40	1	2	40
3	45	1	3	45
4	49	1	4	49
5	52	1	5	52
6	53	1	6	53
7	57	1	7	57
8	58	2	9	116
9	60	1	10	60
10	61	2	12	122
11	63	1	13	63
12	66	1	14	66
13	67	4	18	268
14	68	1	19	68
15	69	1	20	69
16	70	4	24	280
17	72	1	25	72
18	73	1	26	73
19	75	2	28	150
20	76	2	30	152
21	78	1	31	78
22	79	1	32	79
23	80	1	33	80
24	81	1	34	81
25	83	1	35	83
26	84	1	36	84
		36		2.371

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{2.371}{36} = 65'86$$

$Me \rightarrow N = 36 \rightarrow$ par

$$Me = \frac{x_{(N/2)} + x_{(\frac{N}{2}+1)}}{2}$$

$$\frac{N}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$Me = \frac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \frac{67 + 68}{2} = 67'5$$

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

Distribuciones tipo III

$$Me = \underbrace{L_{i-1}}_{Me} + \frac{(N/2) - N_{i-1}}{n_i} \cdot c_i$$

- L_{i-1} : límite inferior Intervalo Me
- N_{i-1} : frec. acumulada inmediatamente al intervalo Me
- n_i : $n_{i\,Me}$
- c_i : $c_{i\,Me}$

Ejercicio 3.10. *La facturación mensual de 50 compañías de transporte durante un determinado mes se recoge en la siguiente tabla en miles de euros.*

	$m_i = 70$	$m_i = 150$	$m_i = 350$	$m_i = 750$
$L_{i-1} - L_i$	(40, 100]	(100, 200]	(200, 500]	(500, 1000]
n_i	10	20	15	5
N_i	10	30	45	50

$\sum n_i = N = 50$

Calcule la mediana y la ~~moda~~.

Media

$c_i = 200 - 100 = 100$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \times n_i}{N} = \frac{70 \cdot 10 + 150 \cdot 20 + 350 \cdot 15 + 750 \cdot 5}{50} = 254$$

Mediana → Intervalo Mediano? $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

$$Me = \underbrace{L_{i-1}}_{Me} + \frac{(N/2) - N_{i-1}}{n_i} \cdot c_i$$

$$Me = 100 + \frac{50/2 - 10}{20} \cdot 100 = 175$$

Elena Gonzalo
671 227 871

Ejercicio 3.2. *Se ha realizado una Encuesta a 100 clientes, obteniendo la siguiente distribución de edades:*

mi		Edad de los entrevistados	n_i	Ni
5	0-10	Menos de 10 años	5	5
15		De 10 a 20 años	10	15
25		De 21 a 30 años	15	30
35		De 31 a 40 años	20	50
45		De 41 a 50 años	15	
55		De 51 a 60 años	20	
65		De 61 a 70 años	10	
75	70-80	Más de 70 años	5	
		Total	100	

Obtener los principales estadísticos descriptivos de la distribución.

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 5 + 15 \cdot 10 + 25 \cdot 15 + \cdots + 75 \cdot 5}{100} = \frac{4.050}{100} = 40'5$$

$$Me \rightarrow N/_2 = 100/_2 = 50$$

$$Me = 40$$

4) Moda → valor de xi que tiene mayor frecuencia absoluta.

- Distibución tipo I → no hay moda
- Distribución tipo II → mayor ni
- Distribución tipo III
  - → si la amplitud de los intervalos es la misma

$$Mo = \underbrace{Li\text{-}1}_{Mo} + \frac{ni+1}{ni-1 + ni+1} \cdot \underbrace{ci}_{Mo}$$

Mo Mo Mo

  - → si la amplitud de los intervalos es distinta

$$Mo = \underbrace{Li-1}_{Mo} + \frac{hi+1}{hi-1 + hi+1} \cdot \underbrace{ci}_{Mo} \qquad hi = \frac{ni}{ci}$$

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

Ejercicio 3.2. *Se ha realizado una Encuesta a 100 clientes, obteniendo la siguiente distribución de edades:*

c_i		Edad de los entrevistados	n_i	N_i
10	0-10	Menos de 10 años	5	5
10		De 10 a 20 años	10	15
10		De 21 a 30 años	15	30
10	Mo	De 31 a 40 años	20	50 → N/2
10		De 41 a 50 años	15	
10	Mo	De 51 a 60 años	20	
10		De 61 a 70 años	10	
10	70-80	Más de 70 años	5	
		Total	100	

Obtener los principales estadísticos descriptivos de la distribución.

$\bar{x} = 40'5$

$Me = 40$

$Mo \rightarrow$ Bimodal

$$Mo = \underbrace{L_{i-1}}_{Mo} + \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \cdot \underbrace{c_i}_{Mo}$$

1^a Mo $\rightarrow Mo = 31 + \frac{15}{15 + 15} \cdot 10 = 36$

2^a Mo $\rightarrow Mo = 51 + \frac{10}{15 + 10} \cdot 10 = 55$

2 Modas

Ejercicio 3.10. *La facturación mensual de 50 compañías de transporte durante un determinado mes se recoge en la siguiente tabla en miles de euros.*

$L_{i-1} - L_i$	(40, 100]	(100, 200]	(200, 500]	(500, 1000]
	$c_i = 60$	$c_i = 100$	$c_i = 300$	$c_i = 500$
n_i	10	20	15	5
$h_i = n_i / c_i$	$10/60 = 0'167$	$20/100 = 0'2$	$15/300 = 0'05$	$5/500 = 0'01$

Calcule la mediana y la moda.

$\bar{x} = 254$

$Me = 175$

$$Mo = \underbrace{L_{i-1}}_{Mo} + \frac{h_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} \cdot \underbrace{c_i}_{Mo}$$

$$Mo = 100 + \frac{0'05}{0'167 + 0'05} \cdot 100 = 123$$

Elena Gonzalo
671 227 871