INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

LAS MEDIDAS DE POSICIÓN EN DISTRIBUCIONES UNIDIMENSIONALES

* Medidas Posición centradas
  - Media aritmética $\bar{x}$
  - Media Geométrica G
  - Media Armónica H
  - Mediana Me
  - Moda Mo

* Medidas Posición NO centradas → Cuantiles
  - Cuartiles Q_j
  - Deciles D_j
  - Percentiles P_j

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

* MEDIDAS POSICIÓN CENTRADAS

1) Media aritmética simple
2) Media aritmética ponderada
3) Mediana
4) Moda
5) Media Geométrica

Es la raíz de índice N del producto de las observaciones elevado a sus respectivas frecuencias.

- Para distribuciones unitarias o distribuciones de tipo I:

$$G = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$$

- En distribuciones no unitarias:

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i^{n_i}}$$

Sólo se puede calcular si no hay observaciones nulas, también puede no tener sentido su cálculo cuando algún valor es negativo, ya que podemos obtener números irracionales.

Debe emplearse cuando los valores e la variable no son de naturaleza aditiva (tasas, tipos de interés, porcentajes, números índices, etc.)

Ventajas

- En su determinación intervienen todos los valores de la distribución.
- Es menos sensible que la media aritmética cuando la distribución tiene valores extremos.
- Es más representativa que la media aritmética cuando la distribución evoluciona de forma acumulativa o con efectos multiplicativos.
- Cuando la distribución no tiene valores nulos, su valor está definido de forma objetiva y es único.

Inconvenientes

- Su significado es menos intuitivo que la media aritmética.
- La mayor complicación de los cálculos.
- Su indefinición (da números con naturaleza imaginaria) cuando tiene valores negativos y su valor nulo cuando una observación toma este valor.

Exigirá normalmente la utilización de logaritmos o de programas informáticos.

$$\boxed{\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i \log x_i}$$

$$\log G = \log\left(\Pi x_i^{n_i}\right)^{1/N} = \frac{1}{N}\log(\underbrace{\Pi x_i^{n_i}}_{x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\ldots x_r^{n_r}}) = \frac{1}{N}\sum n_i \log x_i$$

Y en neperianos:

$$\ln G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i \ln x_i$$

Elena Gonzalo
671 227 871

Ejemplo 3.9 Libro ADE

2007 ⟶ 100
2008 Δ10% ⟶ 110 Δ20%
2009 Δ20% ⟶ 132
2010 Δ25% ⟶ 165 Δ25%

1 ⟶ 110
2 ⟶ 120
3 ⟶ 125

$$G = \sqrt[3]{110 \cdot 120 \cdot 125} = 118'17 \to \Delta 18'17\%$$

$$\bar{x} = \frac{110 + 120 + 125}{3} = 118'33 \to \Delta 18'33\%$$

$$\boxed{G \leq \bar{x}}$$

Ejemplo 3.10 Libro ADE

	Crecim		nº estab
2007	10%	110	4
2008	15%	115	6
2009	20%	120	10
			N = 20

$$G = \sqrt[20]{1'1^4 \cdot 1'15^6 \cdot 1'2^{10}} = 1'1643 \to 116'43 \to \Delta 16'43\%$$

$$\bar{x} = \frac{110 \cdot 4 + 115 \cdot 6 + 120 \cdot 10}{20} = 116'5 \to 1'165 \to \Delta 16'5\%$$

$$\ln G = \frac{1}{20}(4 \ln 110 + 6 \ln 115 + 10 \ln 120) = 4'76 \to e^{4'76} = 116'43$$

6) Media Armónica

La media armónica de N observaciones es la inversa de la media de las inversas de las observaciones; suele denotarse con la letra H.

Para distribuciones unitarias o de tipo I:

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

Para distribuciones de tipo II:

$$H = \frac{N}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \cdots + \frac{n_r}{x_r}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{x_i}}$$

Su utilización es bastante poco frecuente y sólo debe emplearse cuando la variable está medida en unidades relativas, por ejemplo, Km/h., es decir, para promediar velocidades, tiempos, rendimientos, etc.

Ventajas

- Está definida de forma objetiva y es única.
- Para su cálculo tiene en cuenta todos los valores de la distribución.
- Es más representativa que otras medidas en los casos de obtener promedios de velocidades, rendimientos, productividades, etc.
- Los valores extremos tienen una menor influencia que en la media aritmética.

Inconvenientes

- Sólo se puede calcular si no hay observaciones iguales a cero.
- Cuando la variable toma algunos valores muy pequeños puede carecer de significado.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

Ejercicio 3.5. *Un tren recorre 100, 300 y 350 Km. a las velocidades medias de 50, 60 y 70 Km. por hora. Calcule la velocidad media para el recorrido total.*

50 Km/h — 100 Km

60 Km/h — 300 Km

70 Km/h — 350 Km

750 Km = N

$$H = \frac{N}{\sum \frac{n_i}{x_i}} = \frac{(100 + 300 + 350)\ \underline{\underline{Km}}}{\left(\frac{100}{50} + \frac{300}{60} + \frac{350}{70}\right) \frac{Km}{Km/h} = \underline{\underline{h}}} = \boxed{62'5\ Km/h}$$

$$\bar{x} = \frac{50 \cdot 100 + 60 \cdot 300 + 70 \cdot 350}{750} = 63'33\ Km/h$$

$$\boxed{H \leq G \leq \bar{x}}$$

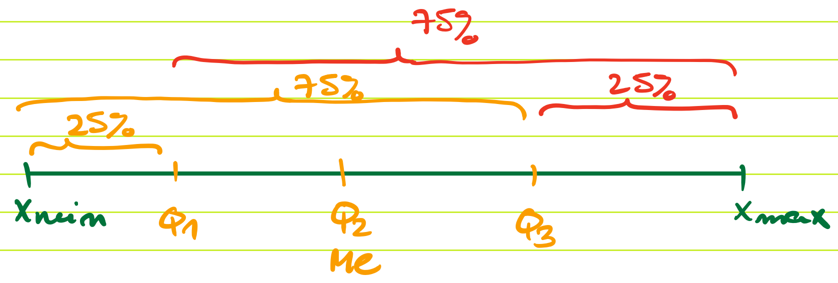
INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

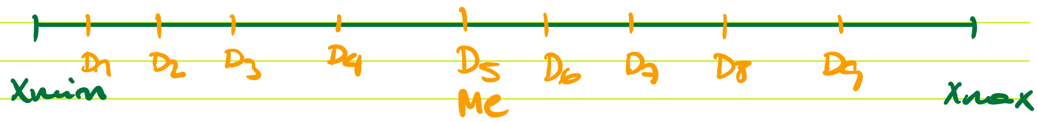
* MEDIDAS DE POSICIÓN NO CENTRADAS

1) CUANTILES

- **CUARTILES**



- **DECILES**



Los cuantiles son los valores de la variable que dividen una distribución de frecuencias en partes iguales.

Los más habituales son: $Me = Q_2 = D_5 = P_{50}$

- Cuartiles, son 3 valores que dividen la serie de datos en cuatro partes iguales. La mediana coincide con el segundo cuartil divide la distribución en dos partes iguales.
- Quintiles, son 4 valores que dividen la distribución en 5 partes iguales.
- Deciles, son nueve valores que dividen la distribución en 10 partes iguales.
- Percentiles, que son 99 valores que dividen la distribución en cien partes iguales.

$Q_1 = P_{25}$

$Q_3 = P_{75}$

Considerando N el número de datos de la distribución, o frecuencia absoluta acumulada, con carácter general los cuantiles se obtienen con la expresión:

CUARTILES

$$\frac{r \cdot N}{q} \rightarrow \text{Posición} \qquad Q_1 \rightarrow \frac{1 \cdot N}{4} \rightarrow \text{Posición} \; ; \; Q_3 \rightarrow \frac{3 \cdot N}{4}$$

en la que r indica el cuantil correspondiente (r = 1, primer cuantil, r = 2, segundo cuantil, etc.) y q el número de intervalos con iguales frecuencias en los que se pretende dividir la distribución (si q = 4 hablamos de cuartiles, si q = 10 de percentiles, etc.).

Para distribuciones agrupadas en intervalos utilizamos la siguiente expresión:

$$Q_q^r = L_{i-1} + \frac{\frac{rN}{q} - N_{i-1}}{n_i} \cdot c_i$$

anterior

$$Q_q^r = L_{i-1} + \frac{\frac{r \cdot N}{q} - N_{i-1}}{n_i} \cdot c_i$$

Algunos programas informáticos no utilizan los mismos criterios o algoritmos indicados con anterioridad; en concreto, la Excel considera a todas las distribuciones como si fueran continuas y sitúa los cuartiles no el valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada supera al establecido por el cuartil, sino en un punto intermedio que obtiene mediante un algoritmo particular.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

Ejercicio 3.9. *Los siguientes datos corresponden a la superficie en hectáreas de una muestra de explotaciones agrarias de una determinada comarca.*

49 61 40 83 67 45 66 70 69 80 58 68 60 67 72 73 70 57
63 70 78 52 67 53 67 75 61 70 81 76 79 75 76 58 31 84.

a) Calcule la media y la mediana.

b) Encuentre los cuartiles inferior y superior.

c) Encuentre los percentiles quinto y noveno.

i	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$
1	31	1	1	31
2	40	1	2	40
3	45	1	3	45
4	49	1	4	49
5	52	1	5	52
6	53	1	6	53
7	57	1	7	57
8	58	2	9	116
9	60	1	10	60
10	61	2	12	122
11	63	1	13	63
12	66	1	14	66
13	67	4	18	268
14	68	1	19	68
15	69	1	20	69
16	70	4	24	280
17	72	1	25	72
18	73	1	26	73
19	75	2	28	150
20	76	2	30	152
21	78	1	31	78
22	79	1	32	79
23	80	1	33	80
24	81	1	34	81
25	83	1	35	83
26	84	1	36	84
		36		2.371 $= \sum x_i \cdot n_i$

$N = 36$

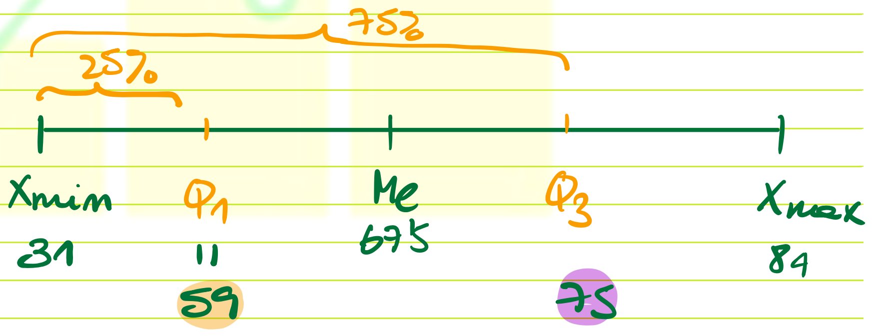
a) $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} = \frac{2.371}{36} = 65'86$

Mediana $N = 36$ par

$$Me = \frac{x_{(N/2)} + x_{(N/2+1)}}{2}$$

$$Me = \frac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \frac{67+68}{2} = 67'5$$

$$Q_2 = Me = D_5 = P_{50} = 67'5$$



b) Posición $Q_1 \rightarrow \frac{r \cdot N}{4} = \frac{1 \cdot 36}{4} = 9 \rightarrow Q_1 = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} =$

$\Rightarrow Q_1 = \frac{58+60}{2} = 59$

Posición $Q_3 \rightarrow \frac{3 \cdot 36}{4} = 27$

$\hookrightarrow Q_3 = 75$

INFO@ADEFACIL.COM
Elena Gonzalo
671 227 871

c) $q = 100$

$P_5 \rightarrow r = 5 \rightarrow \frac{5 \cdot 36}{100} = 1'8 \rightarrow$ Posición 2

$P_5 = X_{(2)} = 40$

$P_9 \rightarrow r = 9 \rightarrow \frac{9 \cdot 36}{100} = 3'4 \rightarrow$ Posición 4

$P_9 = X_{(4)} = 49$

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

Ejercicio 3.2. *Se ha realizado una Encuesta a 100 clientes, obteniendo la siguiente distribución de edades:*

Edad de los entrevistados	n_i
Menos de 10 años	5
De 10 a 20 años	10
De 21 a 30 años	15
De 31 a 40 años	20
De 41 a 50 años	15
De 51 a 60 años	20
De 61 a 70 años	10
Más de 70 años	5
Total	100

Obtener los principales estadísticos descriptivos de la distribución.

$f_i = \frac{n_i}{N}$

m_i	Edad de los entrevistados	c_i	n_i	f_i	N_i	F_i	$m_i \times n_i$
5	0-10 Menos de 10 años	10	5	0'05	5	0'05	25
15	De 10 a 20 años	10	10	0'1	15	0'15	150
25	De 21 a 30 años	10	15	0'15	30	0'3	375
35	De 31 a 40 años	10	20	0'2	50	0'5	700
45	De 41 a 50 años	10	15	0'15	65	0'65	675
55	De 51 a 60 años	10	20	0'2	85	0'85	1.100
65	De 61 a 70 años	10	10	0'1	95	0'95	650
75	70-80 Más de 70 años	10	5	0'05	100	1	375
	Total		100	1			

$\sum m_i \times n_i = 4.050$

- Media aritmética: $\bar{X} = \frac{\sum m_i \times n_i}{N} = \frac{4.050}{100} = 40'5$

- Mediana: $Me = 40 = Q_2 = D_5 = P_{50}$

  $N/2 = 100/2 = 50$

- Moda: $Mo = \underbrace{L_{i-1}}_{Mo} + \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \cdot c_i$

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

- $Mo_1 = 31 + \frac{15}{15+15} \cdot 10 = 36$ años

I_{Mo} [31 - 40]

- $Mo_2 = 51 + \frac{10}{15+10} \cdot 10 = 55$ años

I_{Mo} [51 - 60]

- Cuartiles $\qquad Q_q^r = L_{i-1} + \frac{\frac{r \cdot N}{q} - N_{i-1}}{n_i} \cdot c_i$ $\quad$ anterior

$Q_1 \rightarrow$ Posición

$\left.\begin{array}{l} q = 4 \\ r = 1 \end{array}\right\}$ $I\ Q_1 \quad \frac{100}{4} = 25$

$Q_4^1 = 21 + \frac{\frac{1 \cdot 100}{4} - 15}{15} \cdot 10 = 27'7 \simeq 28$ años