INTEGRAL INDEFINIDA

Si $F(x)$ es una integral con respecto a x de la función $f(x)$, la relación entre ellas se expresa: $\int f(x)dx = F(x) + C$

$F'(x) = f(x)$

$\int f(x)dx = F(x) + C$

Nótese que si $F(x)$ es una integral de $f(x)$ con respecto a x, entonces $F(x)+C$ es también dicha integral, en la cual C es una constante cualquiera, puesto que la derivada de cualquier constante es cero.

Geométricamente $y = F(x) + C$, representa una familia de curvas mutuamente paralelas.

Así, esta familia de curvas tiene la propiedad de que, dado cierto punto (x_0, y_0) existe una y sólo una curva de la familia, que pasa por este punto particular que específica el valor de *C,* es decir $C = y_0 - F(x_0)$

Con C determinada en esta forma, se obtiene una función definida que expresa a y en función de *x*, es decir, la constante de integración se determina únicamente si se especifica un punto por el cual pase la curva que representa a la integral.

Esta especificación se conoce como una *condición inicial,* porque la evaluación de la constante de integración se hizo primeramente en conexión con problemas de mecánica, en los cuales se especifican velocidades o posiciones iniciales de los cuerpos en movimiento.

EJEMPLO

Hallar la solución general de la ecuación $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Y calcular la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 2$.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C}$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C = 2 \rightarrow -1 + C = 2$$

$$C = 2+1 = 3$$

Sol. particular

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x} + 3}$$

SOLUCIÓN:

Para hallar la solución general, tenemos

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Ahora bien, puesto que $F(1) = 2$, escribimos $F(x) = -\frac{1}{1} + C = 2 \Rightarrow C = 3$

Por tanto, la solución particular es $F(x) = -\frac{1}{x} + 3$

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede ser vista por el hecho de que mediante la sustitución de $F'(x)$ por $f(x)$ en esta definición, obtenemos

$$\int \underbrace{F'(x)}_{f(x)}dx = F(x)+C$$

La integración es la inversa de la derivación

Además, si $\int f(x)dx = F(x)+C$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\left[F(x)+C\right] = F'(x) = f(x)$$

La derivación es la inversa de la integración

Esta característica de inversas nos permite obtener fórmulas de integración directamente a partir de las fórmulas de derivación.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

TEOREMA 1: La integral del producto de una constante por una función de x es igual a la constante por la integral de la función.

Esto es, si C es constante.

$$\boxed{\int C\cdot f(x)dx = C\int f(x)dx}$$

Como resultado de este teorema, se sigue que podemos sacar cualquier constante multiplicativa del interior del signo de integral.

TEOREMA 2: La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus integrales.

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(Propiedad de linealidad)

ADEFACIL

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS	
Funciones simples	***Funciones compuestas***
$\int 1 dx = x + C$	
$\int k\,dx = kx + C \rightarrow k\int 1 dx = kx + C$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$	$\int u^n \cdot u' \cdot dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u \cdot u' dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos u \cdot u' dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen} u \cdot u' dx = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' dx = \operatorname{tg} u + C$
$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u' dx = \operatorname{tg} u + C$
$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \operatorname{cotg} x + C$	$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u' dx = \operatorname{cotg} u + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc tg} x + C$	$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u' dx = \operatorname{arc tg} u + C$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc cotg} x + C$	$\int \frac{-1}{1+u^2} \cdot u' dx = \operatorname{arc cotg} u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' dx = \operatorname{arc sen} u + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc cos} x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' dx = \operatorname{arc cos} u + C$

Integral Indefinida	Dada una función f(x), decimos que la función F(x) es una primitiva de f(x) si se cumple: F'(x) = f(x). Se representa por: $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$
Propiedades de la integral indefinida	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
Integración por sustitución	El método de integración por sustitución consiste en introducir una variable t, que sustituye a una expresión apropiada en función de x, de forma que la integral se transforme en otra de variable t, más fácil de integrar.
Integración por partes	$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Integración de funciones racionales	***grado [P(x)] ≥ grado [Q(x)]** $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$
	*** grado [P(x)] < grado [Q(x)]** **- si Q(x) tiene sólo raíces reales simples**: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \ldots + \int \frac{M}{x-m}dx$ **- si Q(x) tiene raíces reales simples y múltiples**: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-a}dx + \int \frac{A_2}{(x-a)^2}dx + \ldots + \int \frac{A_p}{(x-a)^p}dx +$ $+ \int \frac{B_1}{x-b}dx + \int \frac{B_2}{(x-b)^2}dx + \ldots + \int \frac{B_p}{(x-b)^q}dx + \ldots +$ $+ \int \frac{M_1}{x-m}dx + \int \frac{M_2}{(x-m)^2}dx + \ldots + \int \frac{M_p}{(x-m)^r}dx$ **- si Q(x) tiene una raíz real simple y dos complejas conjugadas:** $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{Mx+N}{px^2+qx+r}dx$
Integración de funciones circulares	- Para calcular la primitiva $\int sen^m\, x \cdot cos^n\, x\,dx$, siendo n o m impares, hacemos el cambio *sen x = t* o *cos x = t*, respectivamente. - Para calcular la primitiva $\int sen^m\, x \cdot cos^n\, x\,dx$ siendo n y m pares, la transformamos, utilizando las fórmulas del seno y coseno del ángulo doble, en otra más fácil de obtener.

1. INTEGRALES 'INMEDIATAS' DE TIPO POTENCIAL

$$\boxed{\int n \cdot f'(x) \cdot f_{(x)}^{n-1} dx = f_{(x)}^{n} + c}$$

EJEMPLO:

$$\int x(6x^2+8)^{-1/3} \cdot dx \quad = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{2}{3} \, 12x \, (6x^2+8)^{-1/3} dx = \overbrace{\frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2}}^{3/24} (6x^2+8)^{2/3} + c =$$

$f(x) = 6x^2 + 8$ $\qquad$ $n - 1 = -1/3$ $\qquad$ $= \boxed{\frac{1}{8} \cdot (6x^2+8)^{2/3} + c}$

$f'(x) = 2 \cdot 6x = 12x$ $\qquad$ $n = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3}{3} = \frac{2}{3}$

tiene que ser posible realizar la siguiente identificación:

$$f_{(x)}^{n-1} = (6x^2+8)^{-1/3}$$

de donde se tiene que $\qquad f_{(x)}=6x^2+8$

y por tanto $\qquad f'(x)=12x,$

por otro lado tenemos que $n-1=-\frac{1}{3} \Rightarrow n=\frac{2}{3}$, por tanto necesitamos tener bajo el signo integral la expresión:

$$\int \overbrace{\frac{2}{3}}^{n} \cdot \overbrace{12x}^{f'(x)} \cdot \overbrace{(6x^2+8)^{-1/3}}^{f_{(x)}^{n-1}} dx$$

Así pues operando con constantes en la integral del ejemplo tenemos:

$$\int x(6x^2+8)^{-1/3} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{12} \underbrace{\int \frac{2}{3} 12x(6x^2+8)^{-1/3} dx}_{\text{Integral inmediata tipo potencial}} = \frac{3}{24} \underbrace{(6x^2+8)^{2/3}}_{f_{(x)}^{n}} + c$$

2. INTEGRALES 'INMEDIATAS' DE TIPO EXPONENCIAL

$$\boxed{\int f'(x) a^{f(x)} \ln a dx = a^{f(x)} + c}$$

EJEMPLO:

$\int x^3 5^{x^4+3} dx = \frac{1}{4} \frac{1}{\ln 5} \int 4x^3\, 5^{x^4+3} \cdot \ln 5 \, dx =$

$f(x) = x^4 + 3$

$f'(x) = 4x^3$

$a = 5$

$= \boxed{\frac{1}{4 \ln 5} \cdot 5^{x^4+3} + c}$

necesitamos que: $f(x) = x^4 + 3$, por tanto $f'(x) = 4x^3$

De este modo, operando con constantes en la integral tenemos:

$$\int x^3 5^{x^4+3} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\ln 5} \int 4x^3 \cdot 5x^{4+3} \cdot \ln 5 dx = \frac{1}{4 \ln 5} \cdot 5^{x^4+3} + c$$

3. INTEGRALES 'INMEDIATAS' DE TIPO LOGARÍTMICO

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln|f(x)| + c}$$

EJEMPLO:

$$\int \frac{e^x}{1-3e^x} \cdot dx = \frac{1}{-3} \int \frac{-3e^x}{1-3e^x} dx = \boxed{-\frac{1}{3} \ln|1-3e^x| + C}$$

$f(x) = 1 - 3e^x$

$f'(x) = -3e^x$

Tiene que cumplirse que la derivada del denominador se encuentre en el numerador

$$f(x) = 1\text{-}3e^x, \text{ y } f'(x) = -3e^x$$

Por tanto ajustando con constantes ((-3) en este caso) en la integral dada.

$$\int \frac{e^x}{1-3e^x} \cdot dx = \frac{1}{-3} \int \frac{-3e^x}{1-3e^x} dx = \frac{1}{-3} \ln\left|1-3e^x\right| + C$$

Son también integrales 'inmediatas' de tipo logarítmico:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\frac{1}{f'(x)}\cdot f(x)}}$$

ya que son equivalentes a:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx}$$

EJEMPLO:

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \underbrace{\int \frac{1/x}{\ln x}}\, dx = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\, dx = \boxed{\ln|\ln x| + C_1}$$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\ln x} = \ln|\ln x| + c$$

Donde: $f(x) = \ln x,\quad f'(x) = \frac{1}{x},\quad \frac{1}{f'(x)} = x$

4. INTEGRALES 'INMEDIATAS' DE TIPO INVERSA Y DIRECTA TRIGONOMÉTRICA

$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos u \cdot u' \, dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen} u \cdot u' \, dx = -\cos u + C$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \, dx = \operatorname{arc\,tg} u + C$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,cotg} x + C$	$\int \frac{-1}{1+u^2} \cdot u' \, dx = \operatorname{arc\,cotg} u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \, dx = \operatorname{arc\,sen} u + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,cos} x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \, dx = \operatorname{arc\,cos} u + C$

EJEMPLO

Función Inversa trigonométrica $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-6x^4}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+(\sqrt{6}x^2)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \int \frac{2\sqrt{6}\,x}{\sqrt{1+(\sqrt{6}x^2)^2}} dx =$

$= \boxed{\operatorname{arcsen}(\sqrt{6} \cdot x^2) + C}$

Para asimilar la integral propuesta al tipo de inversa trigonométrica:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{1-f^2(x)}} = \operatorname{arc\,sen} f(x) + C}$$

$u = f(x) = \sqrt{6}\,x^2$

$u' = f'(x) = \sqrt{6} \cdot 2x = 2\sqrt{6}\,x$

necesitamos:

$f^2(x) = 6x^4$, por tanto $f(x) = \sqrt{6}x^2$ y finalmente $f'(x) = 2\sqrt{6} \cdot x$

De este modo operando con constantes en la integral dada:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-6x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \int \frac{2\sqrt{6}x + dx}{\sqrt{1-6x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{6} \cdot x^2\right) + C$$

APLICACIONES ECONÓMICAS

En economía la variación de una cantidad **"y"** con respecto a otra cantidad **"x"** se analiza normalmente en términos de la variación marginal. Así pues de igual forma en que la variación marginal puede obtenerse diferenciando una función, dicha función (exceptuando una constante) puede obtenerse al integrar su variación marginal.

RENTA NACIONAL, CONSUMO Y AHORRO

Si la función consumo viene dada por: $c = f(x)$

en la cual c es el consumo nacional total y $\boldsymbol{x}$ es la renta nacional total, entonces la *propensión marginal a consumir* es la derivada de la función consumo con respecto a $\boldsymbol{x}$.

$$\frac{dc}{dx} = f'(x)$$

y, suponiendo que $x = c+s$, donde s son los ahorros, entonces la *propensión marginal a ahorrar* es

$s = x - c$

$$\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}$$

$$\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}$$

El consumo nacional total es la integral con respecto a x de la propensión marginal a consumir,

$$c = \int f'(x)dx = f(x) + C$$

Debe especificarse una condición inicial para obtener una única función de consumo al integrar la correspondiente propensión marginal a consumir.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2} \qquad \int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_1 = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C_1 = 2\sqrt{x} + C_1$$

EJEMPLO

La propensión marginal a consumir en billones de euros es: $\dfrac{dc}{dx} = 0.7 + \dfrac{0.2}{\sqrt{x}}$

Cuando la renta es cero, el consumo es 8 billones de euros. Hallar la función de consumo.

$$c = \int \frac{dc}{dx}\,dx = \int \left(0.7 + \frac{0.2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int 0.7\,dx + \int \frac{0.2}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 0.7 \int dx + 0.2 \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 0.7x + 0.2 \cdot 2\sqrt{x} + C_1 = 0.7x + 0.4\sqrt{x} + C_1$$

$$x = 0 \rightarrow c = 0.7 \cdot 0 + 0.4\sqrt{0} + C_1 = 8$$
$$C_1 = 8$$

$$\boxed{c = 0.7x + 0.4\sqrt{x} + 8}$$

La función de consumo será: $c = \int \dfrac{dc}{dx}\,dx = \int \left(0.7 + \dfrac{0.2}{\sqrt{x}}\right) dx = 0.7x + 0.4\sqrt{x} + C$

Si $x = 0$, $c = 8$, se deduce $C = 8$ y se tienen $c = 8 + 0.7x + 0.4\sqrt{x}$

5. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

No todas las integrales pueden evaluarse en forma directa usando las integrales estándar expuestas en la sección previa. Sin embargo, muchas veces la integral dada puede reducirse a una integral estándar ya conocida mediante un cambio en la variable de integración.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Según lo dicho hasta aquí, se trata de calcular la integral: $I = \int g(x)dx$

la cual resulta ser una integral complicada.

Buscamos por tanto una función $u = u(x)$ tal que:

$g(x)=f[u(x)]u'(x)$ para una función f.

Entonces si F es una primitiva de f, tenemos por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}F[u(x)] = f[u(x)]u'(x)$$

Por tanto $F[u(x)]$ es la buscada primitiva de g, siendo:

$$I = \int g(x)dx = \int f[u(x)]u'(x)dx = \int \frac{d}{dx}F[(u(x)]dx = F[u(x)] + C \qquad (1)$$

Si tenemos en cuenta que al ser $u = u(x)$, entonces $du = u'(x)\, dx$ la ecuación se puede escribir:

$$I = \int g(x)dx = \int f(u)du = \int F'(u)du = F(u) + C = F[u(x)] + C \qquad (2)$$

En principio, según queda reflejado en la ecuación (2), se trata de encontrar una función $u = u(x)$ de manera que la función $f(u)$ que aparece dentro de la integral tenga una primitiva F conocida.

¿Cómo se encuentra esa función $u = u(x)$ ó cambio de variable adecuado?

Tipo de integral	Sustitución	Cálculo de elementos para sustitución
$\int R(a^x)dx$ ó $\int R(x, a^x)dx$	$a^x = u$	$a^x = u$ $\quad \ln a^x = \ln u$ $\quad x \cdot \ln a = \ln u$ $\boxed{x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln u}$ $\quad \boxed{\frac{dx}{du} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}}$ $\boxed{dx = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \cdot du}$
$\int R(e^x)dx$ ó	$e^x = u$	$e^x = u$ $\quad \ln e^x = \ln u$ $\quad x \cdot \ln e = \ln u$
$\int R(x, e^x)dx$		$\boxed{x = \ln u}$ $\quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{u}$, $\quad \boxed{dx = du/u}$
$\int R(x, \ln x) \cdot dx$	$\ln x = u$	$\ln x = u$ $\quad \boxed{x = e^u}$ $\quad \frac{dx}{du} = e^u$ $\quad ,\boxed{dx = e^u \cdot du}$
$\int R(x, \text{arc tg}\, x) \cdot dx$	$\text{arc tg}\, x = u$	$\boxed{u = \text{tg}\, u}$ $\quad \boxed{dx = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot du}$
$\int R(x, \text{arc sen}\, x) \cdot dx$	$\text{arc sen}\, x = u$	$\boxed{x = \text{sen}\, u}$ $\quad \boxed{dx = \cos u \cdot du}$
$\int R(x, \text{arc cos}\, x) \cdot dx$	$\text{arc cos}\, x = u$	$\boxed{x = \cos u}$ $\quad \boxed{dx = - \text{sen}\, u \cdot du}$

EJEMPLO

$$\int \frac{e^x}{1-e^{2x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = u \quad // \ (e^x)^2 = e^{2x} = u^2 \\ \ln e^x = x \ln e = x = \ln u \to x = \ln u \\ dx = \frac{1}{u} du \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\cancel{u}}{1-u^2} \frac{1}{\cancel{u}} du = \int \frac{1}{1-u^2} du =$$

$$\left[\begin{array}{l} 1-u^2 = (1+u)(1-u) \to \frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} \\ \frac{A - Au + B + Bu}{(1+u)(1-u)} = \frac{1}{1-u^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} A+B=1 \to A+A=1 \quad A=\frac{1}{2} \\ -A+B=0 \to A=B \quad B=\frac{1}{2} \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{1/2}{1+u} du + \int \frac{1/2}{1-u} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} du + \frac{(-1)1}{2} \int \frac{-1}{1-u} du =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1+u| - \frac{1}{2} \ln|1-u| + C$$

$$* \boxed{\int \frac{e^x}{1-e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \ln|1+e^x| - \frac{1}{2} \ln|1-e^x| + C}$$

Hacemos el cambio de variable

$$e^x = u \Rightarrow x = \ln u \Rightarrow dx = \frac{1}{u} du$$

Resulta por tanto

$$\int \frac{e^x}{1-e^{2x}} dx = \int \frac{u}{1-u^2} \cdot \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{1-u^2} du = \int \frac{1/2}{1-u} du + \int \frac{1/2}{1+u} du = -\frac{1}{2} \ln|1-u| + \frac{1}{2} \ln|1+u| + C$$

Deshaciendo finalmente el cambio de variable

$$\boxed{\int \frac{e^x}{1-e^{2x}} dx = -\frac{1}{2} \ln|1-e^x| + \frac{1}{2} \ln|1+e^x| + C}$$

ADEFACIL

EJEMPLO

$$\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \rightarrow e^{\ln x} = e^{u} \rightarrow x = e^{u} \\ dx = e^{u} du \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{e^{u}}(1+u)} \cancel{e^{u}} du = \int \frac{1}{1+u} du = \ln|1+u| + C$$

$$\boxed{* \int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \ln|1+\ln x| + C}$$

$$\boxed{\int \frac{1/x}{1+\ln x} dx = \ln|1+\ln x| + C}$$

Hacemos el cambio de variable: $\ln x = u \Rightarrow x = e^{u} \Rightarrow dx = e^{u} du$

Resulta por tanto:

$$\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int \frac{1}{e^{u}(1+u)} e^{u} du = \int \frac{1}{1+u} du = \ln|1+u| + C = \ln|1+\ln x| + C$$

6. INTEGRACIÓN POR PARTES

Cuando una expresión que incluye productos o logaritmos no puede evaluarse directamente con el uso de formas "estándar", una de las técnicas más útiles para transformarla en una forma "estándar", es la fórmula de integración por partes, la cual se basa en la inversión de la fórmula para la derivación de un producto.

Si u y v son funciones de x ($u=f(x)$, $v=g(x)$), por la fórmula de la diferencial de un producto de funciones, tendremos:

$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$, despejando $u \cdot dv$

$u \cdot \mathrm{d}v = d(u \cdot v) - v \cdot du$, integrando en ambos miembros.

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$$

con lo que nos quedará la fórmula de integración por partes:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Donde:

$u = f(x) \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = f'(x), \quad du = f'(x) \cdot dx$

$v = g(x) \Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} = g'(x), \quad dv = g'(x) \cdot dx$

Sustituyendo esta forma de expresión en la fórmula de integración por partes anteriormente hallada, nos quedará en la forma siguiente:

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx}$$

El método consiste fundamentalmente en descomponer la integral original en producto de dos funciones, de tal forma que al aplicar la fórmula, la nueva integral sea más sencilla que la original.

A continuación damos unos métodos generales que sirven para descomponer la integral dada en productos de dos funciones.

Partimos del supuesto de que cualquier función se puede expresar como producto de dos que denominaremos $u = f(x)$ y $v = g(x)$.

De esta manera tenemos: $\int u dv = \int f(x) \cdot g'(x) dx$

Por tanto siempre que bajo el símbolo integral aparezca alguno de los siguientes casos se procederá a realizar las identificaciones que a continuación se indican.

MÉTODOS GENERALES DE FUNCIONES INTEGRABLES POR PARTES

ALPES → senoidal

arc, log, polinomio, exponencial

CASO 1

Cuando bajo el símbolo integral tengamos el producto de una función trigonométrica inversa multiplicada por la unidad o cualquier constante, entonces:

Función trigonométrica inversa} $f(x)$ →	$\boxed{f(x) = u}$
La unidad o cualquier constante} g →	$\boxed{gdx = dv}$

EJEMPLO ALPES

$$\int \underbrace{\text{arctg}\, x}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{ll} u = \text{arctg}(x) & du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \\ v = x & dv = dx \end{array} \right\} =$$

$$= uv - \int v\, du = x \cdot \text{arctg}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \boxed{x \cdot \text{arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C}$$

$$u = \text{arctg}\, x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\underbrace{dv = dx}_{\substack{\text{ya que en este caso} \\ g=1}} \Rightarrow \int dv = \int dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \text{arctg}\, x \cdot dx = x\, \text{arctg}\, x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x\, \text{arctg}\, x - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = x\, \text{arctg}\, x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C$$

CASO 2

Cuando bajo el símbolo integral tengamos el producto de una función trigonométrica inversa o función logarítmica multiplicada por un polinomio o función racional en x, entonces:

ALPES

• Función trigonométrica inversa o función logarítmica } $f(x)$	$\rightarrow$	$\boxed{f(x) = u}$
• Polinomio en x o función racional en x } $g(x)$	$\rightarrow$	$\boxed{g(x)dx = dv}$

EJEMPLO ALPES

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} & dv = x\, dx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C' = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C}$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto,

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \right) + C$$

EJEMPLO ALPES

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ v = \frac{x^2}{2} & dv = x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{actg}(x) - \int \frac{x^2}{2} \, \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{actg}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \right] =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{actg}(x) - \frac{1}{2} \left[\int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \right] =$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{actg}(x) - \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{actg}(x) \right) + C_1}$$

$$u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = xdx \Rightarrow \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto,

$$\int x \operatorname{arctg} xdx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{\text{funciónracional}} dx$$

Al ser el grado del numerador de la función racional a integrar, igual que el grado del numerador, se realiza la división

$$\text{de donde} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

De este modo

$$\int x \operatorname{arctg} xdx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int 1 \cdot dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{artg} x) + C$$

CASO 3

Cuando bajo el símbolo integral tengamos el producto de una función trigonométrica o función exponencial multiplicada por un polinomio o función racional en x, entonces:

ALPES

• Polinomio en x o función racional en x }	$f(x) \rightarrow$	$\boxed{f(x) = u}$
• Función trigonométrica o función exponencial }	$g(x) \rightarrow$	$\boxed{g(x)dx = dv}$

EJEMPLO

ALPES

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ v = -\cos x & dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2\cos x - \int (-\cos x)\,2x\,dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v = \operatorname{sen} x & dv = \cos x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx \right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - 2(-\cos x) + C =$$

$$= \boxed{-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C}$$

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx$$
$$dv = \text{sen } xdx \Rightarrow \int dv = \int \text{sen } xdx \Rightarrow v = -\cos x$$

por tanto

$$\int x^2 \text{sen } xdx = -x^2 \cos x + \int (\cos x) 2xdx = -x^2 \cos x + 2\int (\cos x) xdx$$

La última integral la resolvemos aplicando de nuevo la integración por partes.

Llamando

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$
$$dv = \cos xdx \Rightarrow \int dv = \int \cos xdx \Rightarrow v = \text{sen } x$$

entonces

$$\int (\cos x) xdx = x \text{ sen } x - \int \text{sen } xdx = x \text{ sen } x + \cos x + C$$

Así pues finalmente: $\int x^2 \text{sen } xdx = -x^2 \cos x + 2(x \text{ sen } x + \cos x) + C$

CASO 4

Cuando bajo el símbolo integral tengamos el producto de una función exponencial multiplicada por una función trigonométrica, entonces:

ALPES

• Función exponencial }	$f(x)$	$\rightarrow$	$\boxed{f(x) = u}$
• Función trigonométrica }	$g(x)$	$\rightarrow$	$\boxed{g(x)dx = dv}$

También se puede proceder asignando a la función exponencial la función $g(x)$, y a la función trigonométrica la función $f(x)$.

Por cualquiera de los dos procedimientos saldrá una integral en la que habrá que integrar por partes nuevamente, en esta segunda integración deberá aplicarse el mismo procedimiento que se aplicó en la primera.

Es habitual que dentro de esta clase de integrales se presenten los denominados **Integrales Cíclicas**, que son aquellos en lo que mediante la integración por partes, se llega nuevamente a la integral original la cual se pasará al primer miembro, despejando finalmente el resultado.

ADEFACIL

EJEMPLO

ALPES

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & du = e^x dx \\ v = -\cos x & dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= -e^x \cos x - \int -e^x \cdot \cos x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & du = e^x dx \\ v = \operatorname{sen} x & dv = \cos x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = +e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

$$\boxed{\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C}$$

$$u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow \int dv = \int \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x + \int \cos x e^x dx$$

La última integral la resolvemos aplicando nuevamente la integración por partes.

Llamando

$$u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$
$$dv = \cos x dx \Rightarrow \int dv = \int \cos x dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$$

Así pues

$$\int \cos x e^x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x e^x dx$$

Sustituyendo este resultado en la integral inicial:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x e^x dx$$

pasando esta última integral al primer miembro

$$2\int e^x \operatorname{sen} x dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

de donde la integral pedida:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x\right) + C$$

7. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Una función racional, es como sabemos una función de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Se trata por tanto de hallar la integral $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)} dx$.

Se puede suponer que el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, ya que si no fuera así basta dividir $P(x)$ por $Q(x)$, obteniéndose

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

De donde $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \Rightarrow$ dividiendo ambos miembros por $Q(x)$ tenemos finalmente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

y la integral se puede escribir

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right] dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

teniendo la seguridad de que el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Según sean las raíces de $Q(x) = 0$ se distinguirán varios casos:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

1. $P(x)$ es la derivada de $Q(x)$ → Integral Inmediata
   - ln
   - arcotg
2. grado $P(x)$ > grado de $Q(x)$ → dividir los polinomios
3. grado $Q(x)$ > grado de $P(x)$ → Analizar raíces de $Q(x) = 0$ → 4 casos

CASO 1: RAÍCES REALES SIMPLE

Es decir,

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

siendo las a_i distintas.

En este caso se puede descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en la forma,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

en donde A_1, A_2, ..., A_n son números reales que se pueden calcular sumando las fracciones anteriores e identificando los coeficientes de las potencias de igual grado de los numeradores del primer y segundo miembro.

Así pues una vez que se hayan determinado las A_i, nuestra integral es la suma de n integrales inmediatas:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}\right)dx=$$
$$=A_1\ln|x-a_1|+A_2\ln|x-a_2|+\ldots+A_n\ln|x-a_n|$$

EJEMPLO

$$I=\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$$

$P(x)$

$Q(x)$

grado $P(x)$ > grado $Q(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad\quad + 2x + 1 & x^2-5x+6 \\ \hline -x^3+5x^2-6x & x+5 \\ \quad 5x^2-4x+1 & \\ \quad -5x^2+25x-30 & \\ \qquad 21x-29 & \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-5x+6}\,dx=\int\left[(x+5)+\frac{21x-29}{x^2-5x+6}\right]dx=$$

$$=\int (x+5)\,dx+\int\frac{21x-29}{x^2-5x+6}\,dx=$$

$$=\int (x+5)\,dx+\int\frac{-13}{x-2}\,dx+\int\frac{34}{x-3}\,dx=$$

$$=\boxed{\frac{x^2}{2}+5x-13\ln|x-2|+34\ln|x-3|+C}$$

$$\underbrace{x^2-5x+6}_{\parallel}=0\ \begin{cases}x=2\\x=3\end{cases}$$

$$(x-2)(x-3)$$

$$\frac{21x-29}{x^2-5x+6}=\frac{\overset{-13}{A}}{x-2}+\frac{\overset{34}{B}}{x-3}$$

$$\begin{cases}Ax-3A+Bx-2B=21x-29\\ A+B=21\\ -3A-2B=-29\end{cases}\ \begin{cases}A=-13\\ B=34\end{cases}$$

Puesto que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectúa la división,

$$\frac{x^3+2x+1}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{21x-29}{x^2-5x+6}$$

por tanto la integral inicial, se transforma en:

$$\int\left(x+5+\frac{21x-29}{x^2-5x+6}\right)dx=\frac{x^2}{2}+5x+\int\frac{21x-29}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{21x-29}{(x-2)(x-3)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x-3}=\frac{A_1(x-3)+A_2(x-2)}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\frac{(A_1+A_2)x-3A_1-2A_2}{(x-2)(x-3)}$$

Identificando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{r}A_1+A_2=21\\ -3A_1-2A_2=-29\end{array}\right\}\Rightarrow A_1=-13,\quad A_2=34$$

y

$$\int\frac{21x-29}{(x-3)(x-2)}\,dx=\int\frac{-13}{x-2}\,dx+\int\frac{34}{x-3}\,dx$$

luego:

$$I=\frac{x^2}{5}+5x-13\cdot\ln|x-2|+34\cdot\ln|x-3|+C$$

CASO 2: RAÍCES REALES MULTIPLES

Si el polinomio $Q(x)$ tiene una raíz a, de orden de multiplicidad "m", además de distintas raíces sencillas b_1, ..., b_n, esto es:

$$Q(x) = (x-a)^m (x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)$$

entonces $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{B_1}{x-b_1} + \frac{B_2}{x-b_2} + \dots + \frac{B_n}{x-b_n}$$

los coeficientes A_1, ..., A_m , B_1,..., B_n se hallan del modo antes expuesto.

EJEMPLO

$$I=\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \int \frac{-1/4}{x-1}\,dx + \int \frac{1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int 1(x-1)^{-2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C_1$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C_1}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$A\underbrace{(x-1)(x+1)}_{x^2-1} + B(x+1) + C\underbrace{(x-1)^2}_{x^2+1-2x} =$$

$$= Ax^2 - A + Bx + B + Cx^2 + C - 2Cx = 1$$

$$\left.\begin{aligned} A+C&=0 \\ B-2C&=0 \\ -A+B+C&=1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\to A=-C \\ &\to B=2C \\ &\to +C+2C+C=1 \\ &\qquad 4C=1 \end{aligned} \quad \left\{\begin{aligned} C&=\frac{1}{4} \\ A&=-\frac{1}{4} \\ B&=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x+1}$$
$$=\frac{A_1(x-1)(x+1)+A_2(x+1)+B_1(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$
$$=\frac{(A_1+B_1)x^2+(A_2-2B_1)x-A_1+A_2+B_1}{(x-1)^2(x+1)}$$

Se identifican coeficientes:

$$\left.\begin{aligned} A_1+B_1&=0\\ A_2-2B_1&=0\\ -A_1+A_2+B_1&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow A_1=-\frac{1}{4},\quad A_2=\frac{1}{2},\quad B_1=\frac{1}{4}$$

luego:

$$I=\int\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}dx+\int\frac{\frac{1}{4}}{x+1}dx$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+C$$