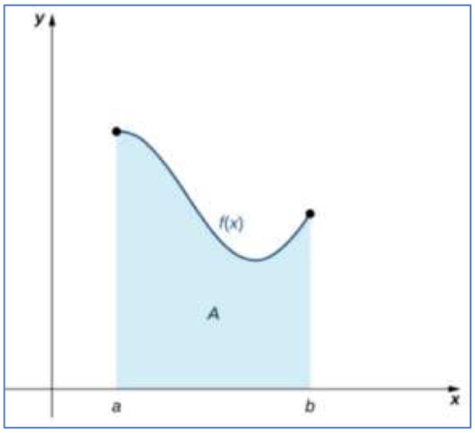
INTEGRAL DEFINIDA

1. INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA BAJO UNA CURVA

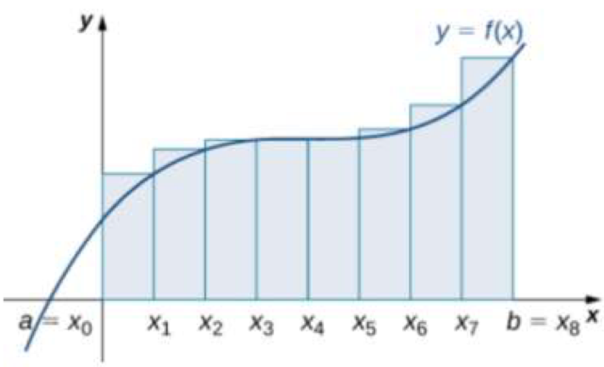
Se plantea el siguiente problema: ¿Cómo aproximar el área bajo una curva?

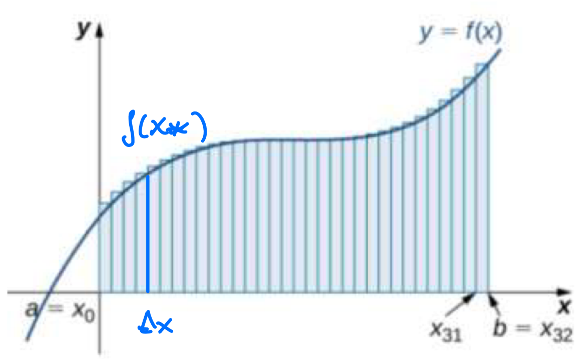
Sea $f(x)$ una función continua y no negativa definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Queremos aproximar el área *A* delimitada por $f(x)$ arriba, el eje *x* debajo, la recta *x* = *a* en la izquierda y la recta *x* = *b* a la derecha.



Si enfocamos el problema desde el punto de vista geométrico. Al dividir una región en muchas formas pequeñas que tienen fórmulas de área conocidas, podemos sumar estas áreas y obtener una estimación razonable del área real.

Si comenzamos dividiendo el intervalo [a, b] en n subintervalos de igual ancho, $\frac{b-a}{n}$.
Hacemos esto seleccionando puntos igualmente espaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$ y de manera que $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$; i = 1, …, n





Si tomamos un punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ de cada intervalo i = 1, …, n y consideramos las áreas de los rectángulos cuya base es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y altura $f(x_i^*)$ y sumamos todas esas áreas, tendremos una aproximación del área total buscada:

$$\boldsymbol{A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i}$$

Una suma de este tipo se llama **suma de Riemann**, llamada así por el matemático Bernhard Riemann del s.XIX que desarrolló esta idea.

Def.: Sea $f(x)$ una función continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$, y tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

sea una suma de Riemann para $f(x)$. Entonces, el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ viene dada por

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Def.: Si f (x) es una función definida en un intervalo [a, b], la **integral definida** de f en el intervalo $[a, b]$ viene dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

siempre que exista el límite. Si este límite existe, se dice que la función $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.

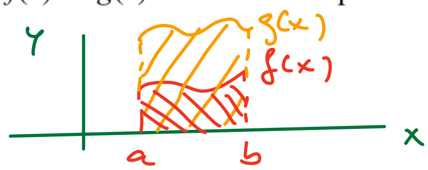
Los números a y b reciben el nombre de límite inferior y superior de la integral, el intervalo $[a, b]$ se llama intervalo de integración y la letra x variable de integración.

2. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

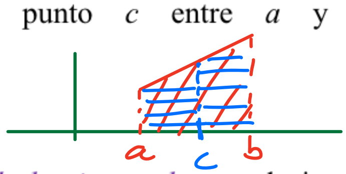
De la definición dada de la integral de Riemann se deducen fácilmente las siguientes propiedades[1].

1. *La integral conserva las desigualdades*, es decir, si tenemos dos funciones f y g en un intervalo $[a, b]$, de manera que $f(x) \leq g(x)$ en todos los puntos x del intervalo $[a, b]$, entonces: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

   A_f A_g



2. *La integral es aditiva respecto del intervalo*, es decir, si tenemos una función f en un intervalo $[a, b]$ y un punto c entre a y b, entonces: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



3. *La integral de la suma es la suma de las integrales*, es decir, si tenemos dos funciones f y g en un intervalo $[a, b]$, entonces: $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. *La integral de un número por una función es el producto del número por la integral de la función*, es decir, si tenemos una función f en un intervalo $[a, b]$ y un número real α, entonces.

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Las propiedades 3 y 4 se pueden combinar y quedan resumidas de la siguiente forma:

Linealidad

5. Dadas dos funciones f y g en el intervalo $[a, b]$ y dos números reales α y β, entonces

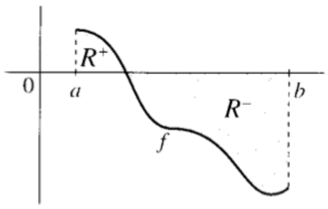
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

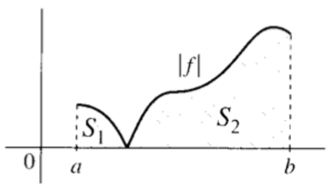
Las dos propiedades que siguen son consecuencias muy sencillas de las anteriores.

6. Sea f una función en un intervalo $[a, b]$, entonces se cumple que el valor absoluto de la integral, es menor o igual que la integral del valor absoluto de la función.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

De forma gráfica



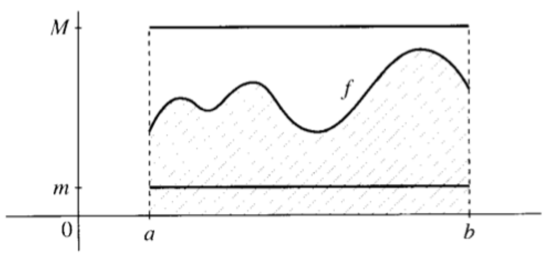


$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\text{Área}(R^+) - \text{Área}(R^-)\right| \leq \text{Área}(R^+) + \text{Área}(R^-) = \text{Área}(S_1) + \text{Área}(S_2) = \int_a^b |f(x)|dx$$

7. Si f es una función en un intervalo $[a, b]$, y M, m son dos números reales tales que

$$m \leq f(x) \leq M$$

Esta propiedad afirma que el área que se encuentra bajo la función $f(x)$, está comprendida entre las áreas de dos rectángulos. Uno está contenido en nuestro recinto y el otro contiene a nuestro recinto.



PROPIEDADES INTERESANTES

1) El valor de la integral definida cambia de signo si se intercambian los límites de integración:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2) Si los límites de integración son iguales, la integral definida vale cero:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3) Si c es un punto interior del intervalo (a, b), la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos (a, c) y (c, b):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

5) La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función:

$$\int_a^b K \cdot f(x)dx = K \cdot \int_a^b f(x)dx$$

ADEFACIL

3. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (REGLA DE BARROW)

Este teorema establece la relación entre $\int_a^b f(x)dx$ e $\int f(x)dx$, entre la integral definida y la indefinida. Lo podemos enunciar como sigue:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad ; \quad (F'(x) = f(x))$$

La igualdad anterior se conoce con el nombre de **Regla de Barrow** y da el procedimiento para calcular una integral definida.

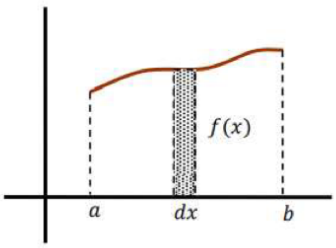
EJEMPLO:

$$\int_0^1 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

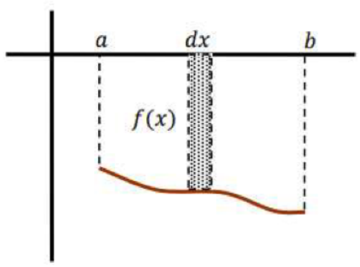
4. APLICACIONES AL CÁLCULO DE ÁREAS

Sea $f(x)$ es una función continua no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área entre la curva y el eje X se define como la integral definida de la función en el intervalo.



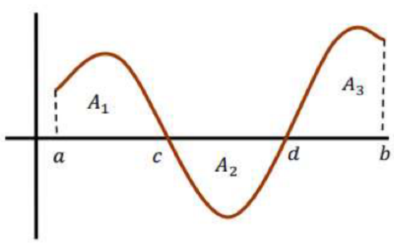
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si la función es no positiva, los rectángulos aproximantes tienen altura cero o negativa, la suma de sus áreas es negativa, y la integral da como resultado un número negativo. En este caso, definimos el área entre la curva y el eje como la integral cambiada de signo.



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Si la función cambia de signo en el intervalo, la integral de la función a lo largo de todo el intervalo nos proporciona el área neta entre su gráfica y el eje X. Es decir, la diferencia entre las áreas situadas por encima del eje y las áreas situadas por debajo del eje. Si queremos calcular el área total encerrada entre la curva y el eje debemos separar la integral por trozos, y cambiar de signo la integral en los trozos donde la función es negativa.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3$$

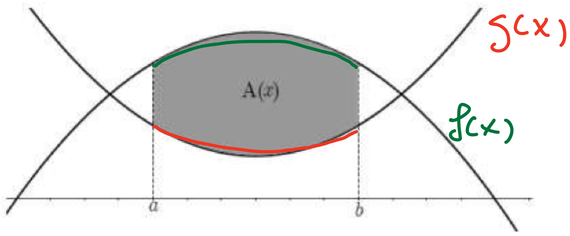
$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Por lo que, para calcular el área deberemos tener en cuenta:
1. La representación gráfica de la función f que interviene en el problema.
2. Delimitación del recinto cuya área deseamos calcular.
3. Estudio del signo de la función f en el intervalo correspondiente.
4. Utilización, en el caso de que exista, de la simetría en el recinto.

ÁREAS DE RECINTOS DELIMITADOS POR DOS O MÁS FUNCIONES

Queremos determinar el área de la región limitada por dos funciones.

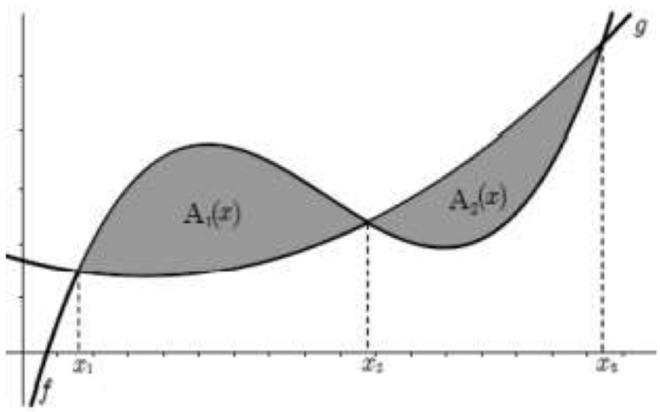
Supongamos que nos dan dos funciones y nos piden calcular el área que hay entre ambas en un intervalo [a, b]



Una vez que hacemos el esbozo de las gráficas, queda claro qué función está encima. Supongamos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo considerado [a, b] con lo que la función diferencia $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ Así, el problema de calcular el área comprendida entre las dos funciones, limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, es equivalente al de calcular el área comprendida por la curva de ecuación $y = h(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

$$Área = A(x) = \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b (f(x) \; - \; g(x))\, dx$$

Es posible que las funciones se corten en varios puntos y por tanto que cambien de posición relativa. Además, el problema se puede completar añadiendo rectas verticales para ampliar o recortar el recinto.



El área del recinto sombreado viene dada por:

$$Área = A_1 + A_2 = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{x_2}^{x_3} (g(x) - f(x))\, dx$$

TIPOS DE EJERCICIOS:

1. Área comprendida entre una curva y = f(x), el eje OX y las rectas de ecuación x = a y x = b

○ **EJEMPLO 1**

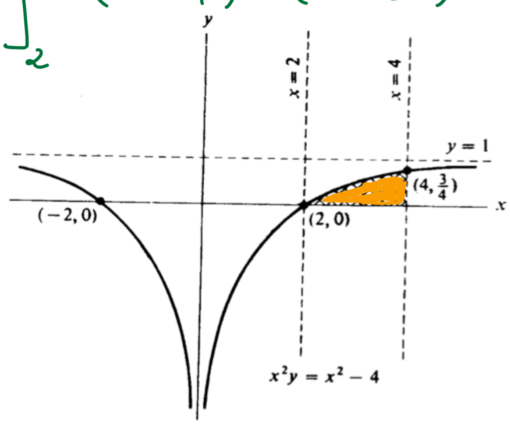
Hallar el área limitada por la curva: $x^2 y = x^2 - 4$ el eje x, y las rectas $x = 2$ y $x = 4$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

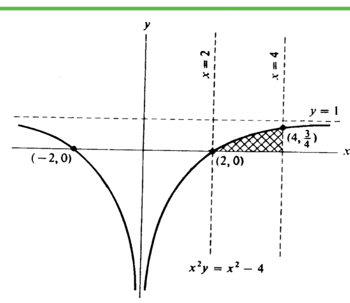
$$\int_2^4 \frac{x^2 - 4}{x^2} dx = \int_2^4 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) dx =$$

$$= \left[x - 4\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_2^4 = x + \frac{4}{x}\Big]_2^4 = \underbrace{\left(4 + \frac{4}{4}\right)}_{5} - \underbrace{\left(2 + \frac{4}{2}\right)}_{4} = 5 - 4 = 1$$



Solución:

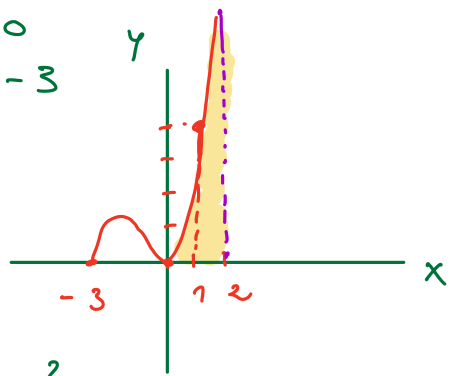
$$A = \int_2^4 \frac{x^2 - 4}{x^2} dx = \int_2^4 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[x + 4x^{-1}\right]_2^4 = 4 + 1 - 2 - 2 =$$



EJEMPLO 2

Hallar el área limitada por la curva $y = x^3 + 3x^2$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

$$y = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$



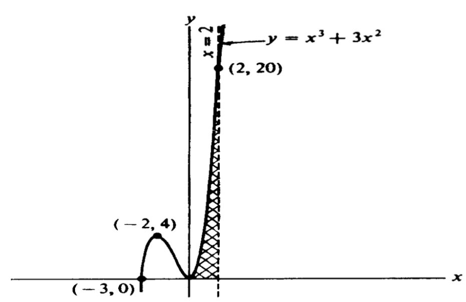
$$\int_0^2 (x^3 + 3x^2)\,dx =$$

$$\int_0^2 x^3\,dx + 3\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^4}{4} + \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\Bigg]_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} + 2^3\right) - 0 =$$

$$= \frac{16}{4} + 8 = 4 + 8 = 12$$

Solución:

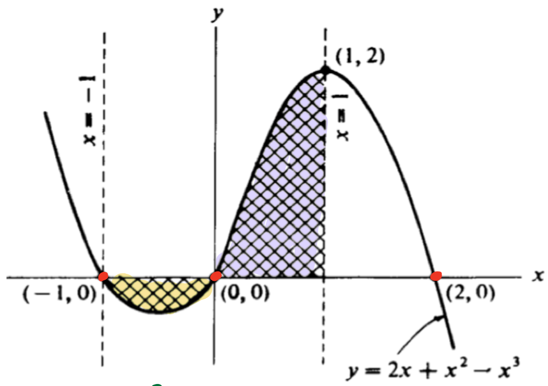
$$A = \int_0^2 (x^3 + 3x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^2 = 12$$



EJEMPLO 3

Hallar el área limitada por la curva $y = 2x + x^2 - x^3$, el eje x, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$

$$y = -x^3 + x^2 + 2x = x(-x^2 + x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$



$$\int_{-1}^{0} \big(\overbrace{-(-x^3 + x^2 + 2x)}^{x^3 - x^2 - 2x}\big)dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x^2 + 2x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\right]_{0}^{1} =$$

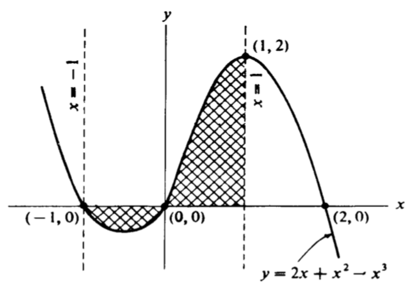
$$= -\left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right) + \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + 1^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{3}} + 1 - \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{3}} + 1 = 2 - \frac{2}{4} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$A = \int_0^1 (2x + x^2 - x^3)dx - \int_{-1}^0 (2x - x^2 - x^3)dx = \left[x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \left[x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^0$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0\right] - \left[0 - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{13}{12} - \left(-\frac{5}{12}\right) \text{(área positiva menos área negativa)}$$

$$= \frac{3}{2}$$



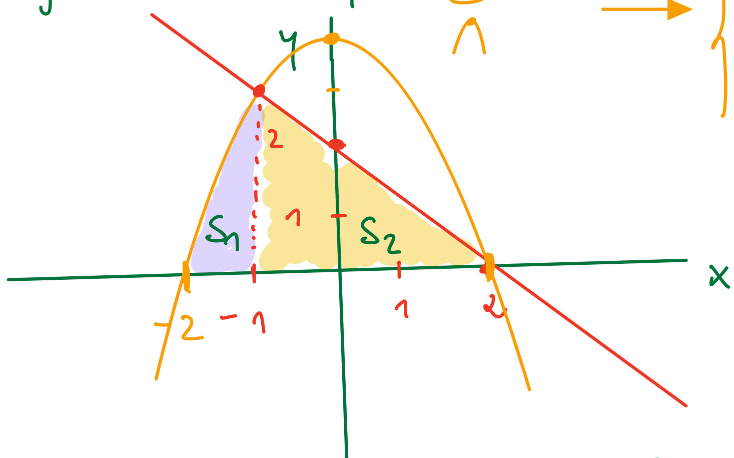
2. Área entre dos curvas $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$

EJEMPLO 1

Calcular el área limitada por el eje de abscisas y las curvas $x + y - 2 = 0$; $x^2 + y - 4 = 0$.

$$x+y-2=0 \longrightarrow y=-x+2 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \longrightarrow y=2 \\ y=0 \longrightarrow x=2 \end{array}\right.$$

$$x^2+y-4=0 \longrightarrow y=-x^2+4 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \longrightarrow y=4 \\ y=0 \longrightarrow x^2=4 \\ \qquad\qquad x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{array}\right.$$



Ptos corte $\left\{\begin{array}{l} y=-x+2 \\ y=-x^2+4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} -x+2=-x^2+4 \\ x^2-x-2=0 \end{array}$ $\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

$$A = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{-1} (-x^2+4)\,dx + \int_{-1}^{2} (-x+2)\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 4x \Big]_{-2}^{-1} + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big]_{-1}^{2} =$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{(-1)^3}{3} + 4(-1)\right)}_{1/3 - 4} - \underbrace{\left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2)\right)}_{\frac{8}{3} - 8} + \underbrace{\left(-\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right)}_{\underbrace{-2+4}_{2}} - \underbrace{\left(-\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right)}_{-\frac{1}{2} - 2} = \frac{37}{6} \approx 6'16$$

Puntos de corten $\left\{\begin{array}{l} y = -x + 2 \\ y = -x^2 + 4 \end{array}\right\}$ $-x + 2 = -x^2 + 4$ → $x^2 - x - 2 = 0$

Ecuación de segundo grado cuyas dos soluciones son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

x = 2 → y = 0

x= -1 → y = 3

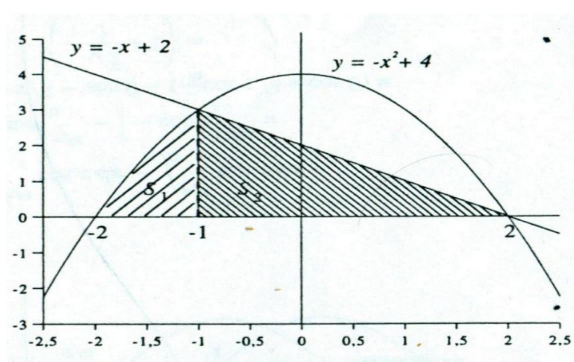
Adicionalmente, la curva $y = -x^2 + 4$ corta al eje de abscisas en el punto: x= -2; y = 0

Por tanto el área buscada será:

$$S_1 = \int_{-2}^{-1}(-x^2 + 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{-1} = \left[-\frac{(-1)^3}{3} + 4(-1) + \frac{(-2)^3}{3} + 4(-2)\right] = \frac{5}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{2}(-x + 2)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{(2)^2}{2} + 4 + \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)\right] = \frac{9}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{5}{3} + \frac{9}{2} = \frac{10 + 27}{6} = \frac{37}{6}$$



5. TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

Para las integrales definidas, tenemos la siguiente *formula de cambio de variable:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Esta fórmula se verifica siempre que f y g' sean ambas continuas. Para ser más precisos, g' ha de ser continua en un intervalo que una a y b, y f ha de ser continua en el conjunto de los valores tomados por g.

EJEMPLO

Evaluar: $A = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx =$ $\left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{2x-1} \\ u^2 = (\sqrt{2x-1})^2 = 2x-1 \\ x = \frac{u^2+1}{2} \rightarrow dx = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}u\,du \end{array} \right\} =$

$dx = u\,du$

$$= \int \frac{\frac{u^2+1}{2}}{\cancel{u}}\cancel{u}\,du = \int \frac{u^2+1}{2}du = \left\{ \begin{array}{l} x=1 \rightarrow u=\sqrt{2\cdot 1-1}=1 \\ x=5 \rightarrow u=\sqrt{2\cdot 5-1}=3 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_1^3 \frac{u^2+1}{2}du = \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\underbrace{\left(\frac{3^3}{3}+3\right)}_{12} - \underbrace{\left(\frac{1^3}{3}+1\right)}_{4/3}}\right] = \frac{1}{2}\frac{32}{3} = \frac{16}{3}$$

$$12 - \frac{4}{3} = \frac{36-4}{3} = \frac{32}{3}$$

Para calcular esta integral, sea $u = \sqrt{2x-1}$. Entonces

$$u^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{u^2+1}{2} \Rightarrow dx = u\,du$$

Antes de sustituir, cambiamos los límites de integración superior e inferior.

Límite inferior *Límite superior*

Cuando $x = 1$, $u = \sqrt{2-1} = 1$ Cuando $x = 5$, $u = \sqrt{10-1} = 3$

Ahora, sustituimos y obtenemos

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^3 \left(\frac{u^2+1}{u}\right) u\,du = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(u^2+1\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{16}{3}$$

6. TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Estamos familiarizados con el concepto de *media* de unos cuantos valores. Por ejemplo, la media de las calificaciones de una asignatura sabemos que corresponde a la nota que tendríamos "en el caso en que todas las calificaciones hubieran sido iguales". Este concepto lo podemos trasladar a funciones y nos queda de la siguiente forma:

- Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$, llamaremos *valor medio* o *media* de f en $[a, b]$ al valor:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \textbf{(1)}$$

EJEMPLO

Hallar el valor promedio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2-2x)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2-2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left(x^3-x^2\right)\Big]_1^4 = \frac{1}{3}\left(\left(4^3-4^2\right)-\left(1^3-1^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(64-16) = 16$$

El valor promedio viene dado por:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2-2x)dx = \frac{1}{3}\left[x^3-x^2\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left[64-16-(1-1)\right] = \frac{48}{3} = 16$$