INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

ÍNDICE

INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

T1. VARIABLES ALEATORIAS Y SUS DISTRIBUCIONES

1.1 VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada suceso elemental del espacio muestral.

Podemos encontrar variables aleatorias de dos tipos: discretas y continuas. Decimos que una variable aleatoria es discreta si toma un número finito o infinito, pero numerable de valores. Será continua si puede tomar un número infinito no numerable de valores, o tomar valores en uno o más intervalos de la recta real.

- **V. A discreta** a aquella cuyos valores son un nº finito de números reales distintos.
- **V. A continua** a aquella cuyos valores son un intervalo, o una unión de intervalos sobre la recta de los números reales. Por tanto, puede tomar ∞ valores.

Ejemplo:

- Lanzar 2 dados y que la v.a. X sea la suma de resultados:
  La v.a. discreta X es : {2, 3, 4, ..., 12}

- Sea el experimento: "conocer el tiempo que se tarda en realizar un cierto trabajo".
  La v.a. continua X toma ∞ valores.

1.1.1 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD, FUNCIÓN DE PROBABILIDAD O FUNCIÓN DE CUANTÍA

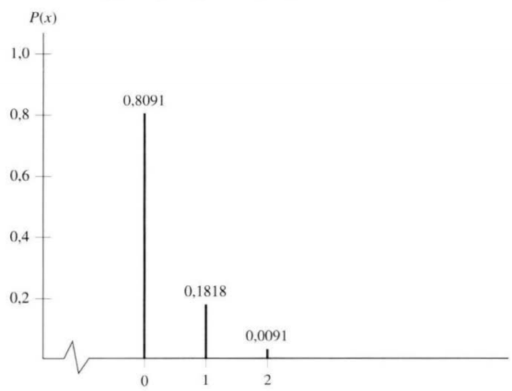
Es una función que llamaremos P(x) y que asigna las probabilidades con la que la variable aleatoria toma los posibles valores, de tal forma que las probabilidades verifiquen:

$$0 \leq P(x_i) \leq 1 \qquad i = 1, 2, 3, ..., r$$

$$\sum_{i=1}^{r} P(x_i) = 1$$

Por lo tanto la probabilidad no puede ser negativa y para todos los valores posibles los sucesos son excluyentes y exhaustivos (Significa que de todos ellos sólo debe de ocurrir uno y no pueden ocurrir dos de forma simultánea).

Función Probabilidad o Cuantía



INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

Ejemplo:

Sea un juego con 5 opciones, numeradas del 1 al 5, con las siguientes probabilidades:

Opción 1 --------------- P = 0,1
Opción 2 --------------- P = 0,3
Opción 3 --------------- P = 0,2
Opción 4 --------------- P = 0,1
Opción 5 --------------- P = 0,3

Creamos una v.a. X cuyos valores corresponden al valor que puede tomar la opción:

P(X = 1) = P(1) = 0,1
P(X = 2) = P(2) = 0,3
P(X = 3) = P(3) = 0,2
P(X = 4) = P(4) = 0,1
P(X = 5) = P(5) = 0,3

La función de distribución es $F(x) = P(X \leq x)$ para x=1, 2, 3, 4, 5 y tomará los siguientes valores:

$F(1) = P(X \leq 1) = 0{,}1$
$F(2) = P(X \leq 2) = 0{,}4$
$F(3) = P(X \leq 3) = 0{,}6$
$F(4) = P(X \leq 4) = 0{,}7$
$F(5) = P(X \leq 5) = 1$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Una variable aleatoria queda definida cuando conocemos su campo de variación y el conjunto de probabilidades con que toma valores en ese campo.

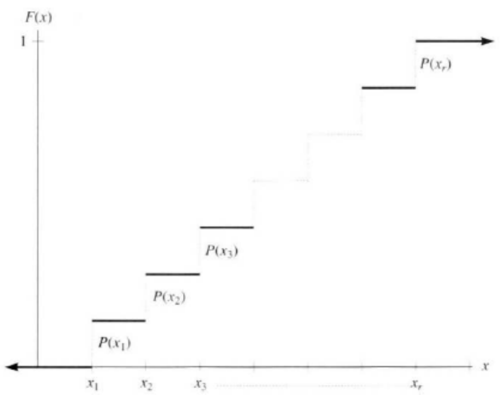
La probabilidad del suceso $X \in (-\infty, x]$; recibe el nombre de función de distribución de la variable aleatoria y la denominaremos $F(x) = P(X \leq x)$. La función de distribución, por definición no puede ser negativa, al ser una probabilidad, ni decreciente, ya que es acumulativa. Además, por ser una probabilidad, está acotada $0 \leq F(x) \leq 1$.

PROPIEDADES.

a) $F(-\infty) = 0 \qquad F(+\infty) = 1$
b) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
c) La función es monótona no decreciente.
d) La función es continua por la derecha.

Si la v.a. es discreta, la función de distribución es escalonada, y los saltos del escalonamiento tendrán un tamaño igual a la probabilidad del punto en que estemos, manteniéndose constante hasta el siguiente punto de la variable.

Función Distribución



INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

1.1.2 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

- ## FUNCIÓN DENSIDAD

Si X es una variable aleatoria de tipo continua y se verifica:

$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

diremos que f(x) es la función de densidad de la variable aleatoria continua. Gráficamente representa la curva límite correspondiente al histograma de frecuencias relativas.

En el caso continuo la suma de densidades de probabilidad o área bajo la curva f(x) es igual a la unidad.

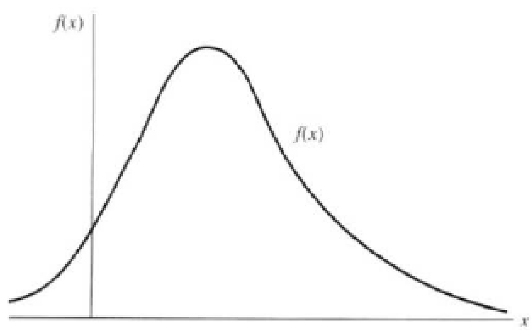
A diferencia del caso continuo no existen las probabilidades puntuales:

P(X = a) = 0 entonces *P(a ≤ X ≤ b) = P(a < X < b)*

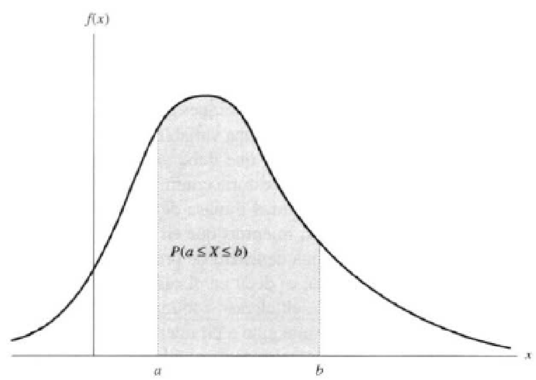
La función f(x), cuya representación gráfica es la curva límite correspondiente al histograma de frecuencias relativas es la función de densidad de probabilidad o implemente la función de densidad de la variable aleatoria continua X

El área bajo la función f(x) es igual a la unidad, de la misma manera que el área en el correspondiente histograma de frecuencias relativas era igual a la unidad.

Función Densidad



Función Probabilidad



INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

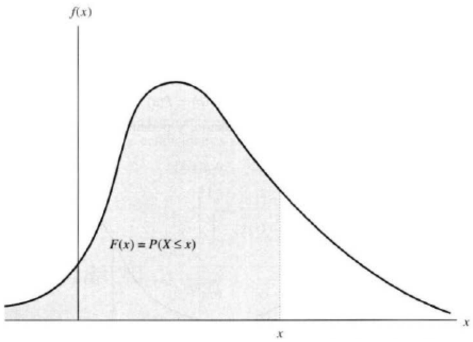
- DISTRIBUCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

En variables aleatorias continuas la función distribución representa el área limitada por la curva función de densidad y a la izquierda de la recta X=x.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

La función de distribución conduce a la probabilidad a través de una longitud, mientras que si utilizamos la función de densidad el valor es el mismo pero expresado como un área.

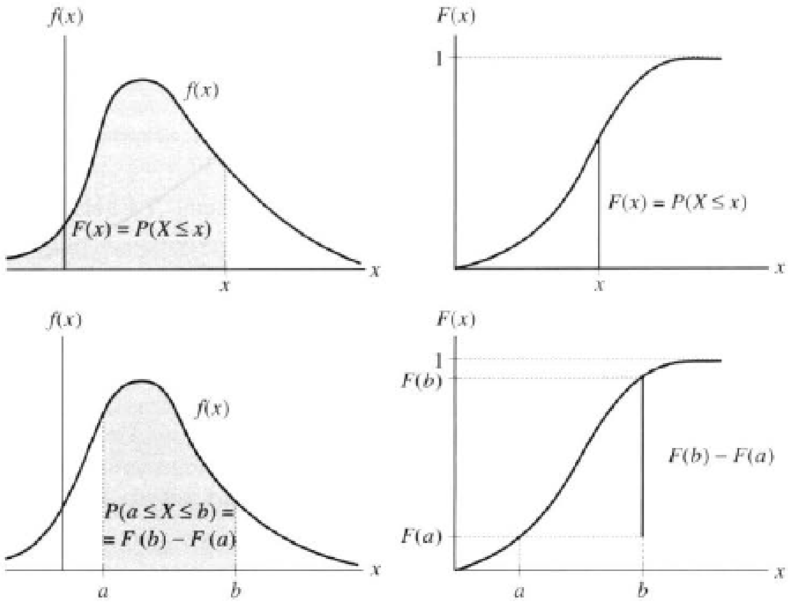
Función Distribución



La función de distribución de una variable aleatoria continua es una función que verifica:

1. $F(-\infty) = 0$.
2. $F(+\infty) = 1$.
3. Es no decreciente, es decir: si $x_i < x_j$ entonces $F(x_i) \leqslant F(x_j)$.
4. $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
5. La derivada de la función de distribución es la función de densidad:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$



INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

EJEMPLO

Sea X una v.a. continua, cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x \leq 0 \\ x^3 & \text{para} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{para} \quad x > 1 \end{cases}$$

La función de densidad será $f(x) = F'(x) = 3x^2$, luego :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Veamos que realmente es función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 dx = \int_0^1 3x^2\, dx = [\, x^3 \,] \;= 1 - 0 = 1$$

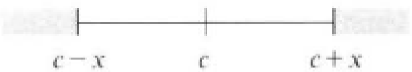
Por ejemplo:

$$P(0.5 < x < 0.7) = \int_{0.5}^{0.7} 3x^2 dx = [\, x^3 \,] \;= (0.7)^3 - (0.5)^3 = =0.343 - 0.125 = 0.218$$

1.1.3 DISTRIBUCIÓN SIMÉTRICA

Diremos que una variable aleatoria X es simétrica respecto de un punto c si se verifica:

$$P(X \leqslant c - x) = P(X \geqslant c + x) \quad \forall\, x$$



O bien, si expresamos esta definición por medio de la función de distribución, entonces diremos que la variable aleatoria X tiene una distribución simétrica respecto del punto c, si se verifica:

$$F(c - x) = 1 - F(c + x) + P(X = c + x), \quad \forall\, x$$

ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

1.2 VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL

1.2.1 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BIDIMENSIONAL

Podemos encontrarnos con los dos casos ya mencionados, discretos y continuos.

CASO DISCRETO:

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA**

$$0 \le P(x, y) \le 1 \qquad \sum_{1}^{r}\sum_{1}^{s} P(x_i, y_j) = 1$$

- **FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA**

$$F(x, y) = P\left(X \le x; Y \le y\right) = \sum\sum P(X = x_i; Y = y_j)$$

CASO CONTINUO:

- **FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA O BIDIMENSIONAL**

$$f(x, y) \ge 0 \qquad -\infty < x < +\infty \qquad -\infty < y < +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$$

- **FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA O BIDIMENSIONAL**

$$F(x, y) = P(X \le x; Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy$$

1.2.2 DISTRIBUCIONES MARGINALES

Cuando queremos conocer por separado la distribución de alguna o de ambas variables partiendo de la información que nos da la distribución conjunta.

CASO DISCRETO:

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD MARGINAL**

$$P_{i\cdot} = P(x_i) = \sum_{y_j} P(X = x_i; Y = y_j)$$

$$P_{\cdot j} = P(y_j) = \sum_{x_i} P(X = x_i; Y = y_j)$$

- **FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN MARGINAL**

$$F_1(x) = P(X \le x, Y < \infty) = \sum P_{i\cdot}$$

$$F_2(y) = P(X < \infty, Y \le y) = \sum P_{\cdot j}$$

INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

CASO CONTINUO:

- **FUNCIÓN DENSIDAD MARGINAL**

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

- **FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN MARGINAL**

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx$$
$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy$$

1.2.3 DISTRIBUCIONES CONSICIONADAS

Cuando nos interesa conocer cómo se distribuye una de las variables cuando se imponen condiciones a la otra.

CASO DISCRETO:

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONDICIONADA**

$$P\left(x/_{y}\right) = P\left(X = x/_{Y=y}\right) = \frac{P(X=x;Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{ij}}{P.j} \quad siempre\ que\ P(y=y) > 0$$

- **FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONDICIONADA**

$$F\left(x/_{y}\right) = P\left(X \le x/_{Y=y}\right) = \frac{\sum P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

CASO CONTINUO:

- **FUNCIÓN DENSIDAD CONDICIONADA**

$$f\left(x/_{y}\right) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_2(y)} & f_2(y) > 0 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

$$f\left(y/_{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)} & f_1(x) > 0 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

- **FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONDICIONADA**

$$F\left(x/y\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(x/y\right) dx = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{f_2(y)}$$

$$F\left(y/x\right) = \int_{-\infty}^{y} f\left(y/x\right) dy = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dy}{f_1(x)}$$

1.3 INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

Se dice que dos variables aleatorias son independientes si y sólo si se verifica que la función de distribución conjunta es igual al producto de sus distribuciones marginales:

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

Para variables discretas: $P(x,y) = P(x_i) \cdot P(y_j)$

Para variables continuas: $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$