INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

ÍNDICE

INFO@ADEFACIL.COM

ELENA GONZALO NOGUÉS

671 227 871

T2. CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

2.1 VALOR ESPERADO O ESPERANZA MATEMÁTICA

- En el caso discreto representa la media ponderad a de los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria X.

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) \longrightarrow \text{V.A.D} \rightarrow \boxed{E(x) = \sum x_i p(x_i)}$$

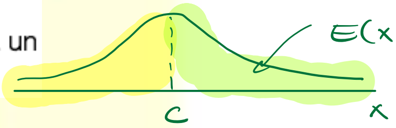
- En el caso continuo representa el centro de la función de densidad.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \longrightarrow \text{V.A.C} \longrightarrow \boxed{E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx}$$

Para ambos casos es necesaria la condición de convergencia absoluta, es decir que tengan un valor finito.

PROPIEDADES:

- La esperanza de una constante es la propia constante. $\longrightarrow E(a) = a$
- Si la variable aleatoria está acotada $a \le X \le b \Rightarrow a \le E(X) \le b$
- $E(a+b) = E(a) + E(b) \longrightarrow E(a+b) = E(a) + E(b)$
- $E(kX) = kE(X) \longrightarrow E(ax) = aE(x)$
- Si tenemos dos funciones $g(X) \le H(X) \Rightarrow E[g(X)] \le E[h(X)]$
- Si X es una variable aleatoria con distribución simétrica respecto a un punto ***c***, entonces si existe su esperanza $E(X) = c$



2.2 VALOR ESPERADO O ESPERANZA MATEMÁTICA

En este caso se calcula el valor esperado de una función, a diferencia del caso anterior en el que se calcula el valor esperado de una variable.

CASO DISCRETO $E[g(x)] = \sum_i g(x_i)P(x_i)$

CASO CONTINUO $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx$

2.3 MOMENTOS

- CON RESPECTO AL ORIGEN

$$\alpha_r = E(X^r) \quad r = 1,2,3,\ldots,n \longrightarrow \alpha_r = E(x^r) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = E(x) \\ \alpha_2 = E(x^2) \end{cases}$$

$$\alpha_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_i x_i^r P(x_i) \longrightarrow \text{V.A.D} \quad \alpha_r = \sum x_i^r \cdot p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx \longrightarrow \text{V.A.C} \quad \alpha_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx \end{cases}$$

INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

- CON RESPECTO A LA MEDIA O MOMENTO CENTRAL

$$\mu_R = E\left[(X - E[X]^r)\right] \quad r = 2,3,\ldots,n \longrightarrow \mu_r = E\left[(x - E(x)^r)\right]$$

$$\mu_r = E\left[(X) - [(X)]^r\right] = \begin{cases} \sum (x_i - E[x_i])^r P(x_i) & \rightarrow \text{V.A.D} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^r f(x)dx & \rightarrow \text{V.A.C} \end{cases}$$

Importante:

$\alpha_1 = E(X) = \bar{x} = \mu$

$\mu_2 = \sigma^2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2$

$\alpha_1 = E(x) = \bar{x} = \mu$

$\mu_2 = E(x - E(x))^2 = Var(x) = \sigma^2 =$

$= E(x^2) - (E(x))^2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2$

2.4 VARIANZA

Es el momento central o con respecto a la media de orden dos. Es una medida de dispersión absoluta de los valores de la distribución con respecto a su media, nos indica cómo representa la media a la distribución. Como la varianza se encuentra representada en una unidad distinta a la media, se introduce la desviación típica.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$\sigma^2 \rightarrow €^2$

$\sigma \rightarrow €$

La varianza está influenciada por el tamaño de los valores que toma y por la media.

PROPIEDADES

- $\mu_2 = \sigma^2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2$
- La varianza de una constante es cero. $\rightarrow$ $Var(a) = 0$
- $V(kX) = k^2V(X)$ $\longrightarrow$ $Var(ax) = a^2 Var(x)$
- $V(kX + B) = k^2V(X) + 0$ $\longrightarrow$ $Var(ax + b) = a^2 Var(x) + \varnothing$
- Si X e Y son dos variables aleatorias independientes, cuyas varianzas existen, entonces se verifica: $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$
- La varianza nunca es negativa.

$Var(x) \geq 0$

$\begin{cases} Var(1x + 1y) = 1^2 Var(x) + 1^2 Var(y) \\ Var(1x + (-1)y) = 1^2 Var(x) + (-1)^2 Var(y) \end{cases}$

$= Var(x) + Var(y)$

2.5 COEFICIENTE DE VARIACIÓN

Para eliminar la influencia que tiene la media con respecto a la varianza, se utiliza otra medida de dispersión, esta vez relativa, que expresa la dispersión de una variable aleatoria respecto a su media. Con el coeficiente de variación podemos comparar dos distribuciones distintas de probabilidad.

$$\boxed{C.V. = \frac{\sigma}{\mu}} \rightarrow \text{adimensional}$$

$C.V \uparrow\uparrow \rightarrow \mu$ menos representativa

$C.V \downarrow\downarrow \rightarrow \mu$ más "

El coeficiente no tendrá sentido, cuando la variable aleatoria X tome valores positivos y negativos(la media puede quedar compensada), sólo cuando tome valores positivos.

INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

2.6 CAMBIOS DE ORIGEN Y ESCALA

A veces es necesario para facilitar los cálculos, realizar cambios de origen y escala. Si desplazamos los valores de una variable X en O_T unidades del eje.

$$T = X - O_T$$
$$E(T) = E(X) - O_T \Rightarrow \mu_T = \mu_X - O_T$$

CAMBIO ORIGEN

$$T = X - O_T$$
$$E(T) = E(X - O_T) = E(X) - O_T$$
$$\mu_T = \mu_X - O_T$$

CAMBIO ESCALA

$$E = aX$$
$$E(E) = a\,E(X)$$

Si realizamos un cambio de escala e>0 $\quad Y = \dfrac{X - O_T}{e}$

$$E(Y) = E\left[\frac{X - O_T}{e}\right] = \frac{1}{e}E(X) - O_T$$
$$\boxed{\mu_Y = \frac{\mu_X - O_T}{e}}$$

Por lo tanto la media se verá afectada ante cambios de origen y escala.

Con respecto a la varianza: $\quad Y = \dfrac{X - O_T}{e}$

$$\sigma_Y^2 = V\left(\frac{X - \cancel{O_T}}{e}\right) = \frac{1}{e^2}V(X) = \frac{\sigma_X^2}{e^2}$$

$$\rightarrow Var(Y) = Var\left(\frac{X - O_T}{e}\right) = Var\left(\frac{1}{e}(X - O_T)\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^2 Var(X - O_T) = \frac{1}{e^2}Var(X)$$

Por lo tanto no le afectan los cambios de origen, pero sí los de escala.

Con respecto al coeficiente de variación:

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\dfrac{\sigma_X}{\cancel{e}}}{\dfrac{\mu_X - O}{\cancel{e}}} = \frac{\sigma_X}{\mu_X - O}$$

Si solo hay cambio de escala

$$E = aX$$
$$CV_E = \frac{\sigma_E}{\mu_E} = \frac{\cancel{a}\,\sigma_X}{\cancel{a}\,\mu_X} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = CV_X$$

Por lo tanto no le afectan los cambios de escala, pero sí los de origen.

2.7 TIPIFICACIÓN DE UNA VARIABLE

Las distribuciones poseen en general distintas medidas de posición y de dispersión. Puede ocurrir que muchas distribuciones sean análogas, o sea, sólo se diferencian en sus orígenes o en sus escalas. Cuando queremos comparar estas distribuciones debemos hacerlas homogéneas, a través de la normalización o tipificación.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad N(0,1)$$

$$X \longrightarrow Z \rightarrow \text{adimensional}$$
$$N(\mu, \sigma) \qquad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Es necesario que σ > 0 . Z no tiene asociada ninguna medida, con lo que puede compararse con otras variables tipificadas.

INFO@ADEFACIL.COM
ELENA GONZALO NOGUÉS
671 227 871

2.8 OTRAS MEDIDAS DE POSICIÓN Y DISPERSIÓN

- Cuantiles: mediana, cuartiles, deciles, percentiles.

  $P(X \le x_q) \ge q \qquad P(X \ge x_q) \le 1-q \qquad caso\ discreto.$

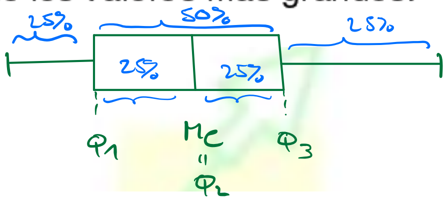
  $P(X \le x_q) = q \qquad F(x_q) = q \qquad caso\ continuo$

  $$0 \le q \le 1$$

- Moda: será aquel valor de la variable para el cual la $\overbrace{\text{función de probabilidad}}^{V.A.D}$ o la $\underbrace{\text{función de densidad}}_{V.A.C}$ se hace máxima. $f'(M_o) = 0 \quad f''(M_o) < 0$
- Desviación absoluta media respecto a la mediana.

  $$E\left[\left|X - M_e\right|\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x - M_e\right| f(x)dx$$

- Recorrido intercuartílico. $R_Q = Q_3 - Q_1$ dentro de este intervalo intercuartílico se encuentran el 50% de los valores centrales de la variable, prescindiendo del 25% de los valores más pequeños y el 25% de los valores más grandes.



2.9 MEDIDAS DE FORMA

- Coeficiente de asimetría de Fisher: $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$

  $\gamma_1 = 0 \quad simetrica$

  $\gamma_1 < 0 \quad asimetrica\ negativa$

  $\gamma_1 > \quad asimetrica\ positiva$

- Coeficiente de curtosis o apuntamiento:

  $$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

  $\gamma_2 = 0 \quad mesocurtica\ o\ normal.$

  $\gamma_2 < 0 \quad platicurtica$

  $\gamma_2 > 0 \quad leptocurtica$