info@tuacademiafacil.com

1. NOCIONES MATEMÁTICAS BÁSICAS.

LENGUAJE MATEMÁTICO.

$\mathbb{N} \Rightarrow$ números naturales

$\mathbb{Z} \Rightarrow$ números enteros

$\mathbb{Q} \Rightarrow$ números racionales

$\mathbb{I} \Rightarrow$ números irracionales

$\mathbb{R} \Rightarrow$ números reales

$\mathbb{C} \Rightarrow$ números complejos

$=$, $\neq$, $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $\approx$ aproximación, ∞

$\in$ pertenecer $\notin$ No pertenece $\cup$ unión $\cap$ intersección

$\Rightarrow$ Implica $\not\Rightarrow$ no implica $\Leftrightarrow$ doble implicación

$\wedge$ Y lógica $\vee$ O lógica $\forall$ para todo

$\exists$ existe $\nexists$ no existe $\exists!$ existe y es único

$/$ tal que $:$ tal que $\sum$ Suma $\prod$ producto

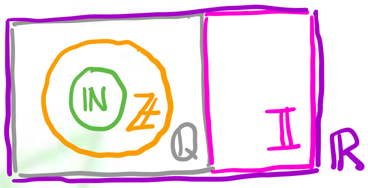
$\rightarrow$ tiende a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ Δ Incremento ε epsilon Valor pequeño indep.

δ delta. Valor pequeño depend.

NÚMEROS REALES. $\mathbb{R}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $3 \in \mathbb{N}$ $-3 \in \mathbb{Z}$ $3 \in \mathbb{Z}$ $-3 \notin \mathbb{N}$



$\mathbb{Q}$ = son los que podemos expresar en forma de fracción: $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$

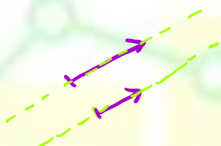
$2 \in \mathbb{Q}$ $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ $4{,}2 \in \mathbb{Q}$ $4{,}2 = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}$ $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{I}$ = no se pueden expresar en forma de fracción $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$ $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$

2. ÁLGEBRA LINEAL

VECTORES



dirección, sentido, módulo.

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$

$\vec{u} = (1, 3)$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ módulo.

OPERACIONES CON VECTORES:

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$

a) Igualdad: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$

$\vec{u} = \vec{v}$ si $u_1 = v_1$ $u_2 = v_2$ .... $u_n = v_n$

$\boxed{\vec{u} = \vec{v} \text{ si } \forall i \ \ u_i = v_i}$

b) Suma:

$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n)}$

c) Diferencia:

$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, \ldots, u_n - v_n)}$

Tienen que tener la misma dimensión.

d) Producto por un escalar: $k \cdot \vec{u}$

$\boxed{k \cdot \vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3, \ldots, ku_n)}$

e) Producto escalar:

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n}$

ejemplo: $\vec{u} = (1, 2)$ $\vec{v}(-2, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = -2 + 6 = \underline{\underline{4}}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $90°$

PROPIEDADES DE LOS VECTORES:

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ $\quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

a) Norma de un vector. es la longitud del vector.

módulo

$$\|\vec{u}\| = |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

$$\|\vec{v}\| = |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

ejemplo: $\vec{u} = (1, -1, 3)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

b) Distancia euclídea. distancia entre dos vectores

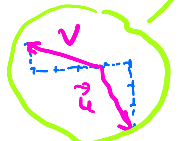
$$\boxed{\|\vec{u} - \vec{v}\|} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} = \boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)}} = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$$

c) Ortogonalidad: Dos vectores son ortogonales si forman un ángulo de 90°

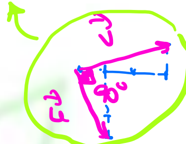
$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

ejemplo: $\vec{u}(1, -3)$ $\quad \vec{v}(-3, 1)$



$\vec{u} \not\perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$

$\vec{u}(1, -3)$ $\quad \vec{v}(3, 1)$



$\vec{u} \cdot \vec{v} =$
$= 3 + (-3) = 0$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

d) Vector unitario. La longitud del vector es 1; su norma es 1.

$$\boxed{\vec{u} \text{ unitario} \iff \|\vec{u}\| = 1}$$

ejemplo
$\vec{u} = (1, 0)$
$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

Si $\vec{u}$ no es unitario $\Rightarrow \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ unitario

ejemplo:
$\vec{u}(3, 4)$
$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ es unitario.

e) Desigualdad de Cauchy-Schwartz.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ se cumple: $\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| < \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

ejemplo: $\vec{u}(1, -2, 1)$ $\quad \vec{v}(2, 1, 0)$

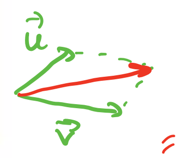
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + (-2 \cdot 1) + 1 \cdot 0 = 0$ $\quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| = 0$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$0 \leq \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{30}$ #

f) Triángulo de Minkowsky:

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ se cumple: $\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}$



3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

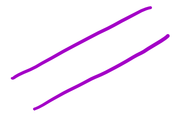
$\Rightarrow$ Sistema de m ecuaciones y n incógnitas.
$x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow$ Incógnitas

- COMPATIBLE — Tiene solución
  - DETERMINADOS $\Rightarrow$ S.C.D — una única solución
  - INDETERMINADOS $\Rightarrow$ S.C.I — Tiene ∞ soluciones
- INCOMPATIBLE $\Rightarrow$ S.I — no tiene solución

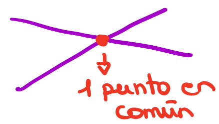
info@tuacademiafacil.com

Sistemas dos ecuaciones y dos incógnitas: LINEALES

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ -x+2y=5 \end{array}\right\}$$



S. INCOMPAT



S. COMPATIBLE DETERM

S. COMPATIBLE INDETERMINADO.

Método de sustitución:
https://youtu.be/3ilMKCkRRvE?si=D_98DNMZJA5sD7xS

Método de igualación:
https://youtu.be/rSKf4RbI6aQ?si=TAFdQ-QItRtq-Elx

Método de reducción:
https://youtu.be/oVAzrzh96vs?si=hVtz56brmE2yq3Fx

Sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas: LINEALES

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{array}\right\}$$

1) Despejamos una incógnita de una de las 3 ecuaciones

$x+y+z=6 \Rightarrow x=6-y-z$

2) Sustituir en las dos ecuaciones que no hemos utilizado

$$\left.\begin{array}{l} 2(6-y-z)-y+z=3 \\ (6-y-z)+2y-z=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 12-2y-2z-y+z=3 \\ 6-y-z+2y-z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y-z=-9 \\ y-2z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+z=9 \\ -y+2z=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{l} 3y+z=9 \\ -3y+6z=+12 \end{array}\right\} +$$

$7z=21 \Rightarrow z=\frac{21}{7}=3$

$3y+3=9$

$3y=6$

$y=\frac{6}{3}=2$

$x=6-2-3=1$

sol: $x=1 \quad y=2 \quad z=3$ S. COMPAT DET.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x+y+3z=15 \end{array}\right\}$$

1) Despejamos una incógnita

$x+y+z=6 \Rightarrow x=6-y-z$

2) Sustituir en las otras dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2(6-y-z)-y+z=3 \\ 4(6-y-z)+y+3z=15 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 12-2y-2z-y+z=3 \\ 24-4y-4z+y+3z=15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y-z=-9 \\ -3y-z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y-z=-9 \\ 3y+z=9 \end{array}\right\} +$$

$0y+0z=0$

$\Rightarrow$ Tenemos ∞ sol S. COMP INDET.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2z=5 \end{array}\right\}$$

1) Despejamos una incógnita

$x+y+z=6 \Rightarrow x=6-y-z$

2) Sustituir en las otras dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2(6-y-z)-y+z=3 \\ 3(6-y-z)+2z=5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 12-2y-2z-y+z=3 \\ 18-3y-3z+2z=5 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y-z=-9 \\ -3y-z=-13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y-z=-9 \\ 3y+z=13 \end{array}\right\} +$$

$0y+0z=4$!! IMPOS.

No tiene solución: S. INCOMPAT.

Sistemas homogéneos (LINEALES)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

m ecuaciones y n incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Como mínimo tiene la solución $x=0$, $y=0$, $z=0$

Siempre es COMPATIBLE

DETERMINADO: $x=0$, $y=0$, $z=0$

INDETERMINADO: $x=0$, $y=0$, $z=0$ y ∞ más

Indicar la expresión correcta para la expresión "para cualquier ($\forall$) valor infinitesimal positivo ε existe ($\exists$) algún valor infinitesimal positivo δ tal que ($/ \, :$) el valor absoluto ($|x-y|$) de la diferencia de dos puntos x e y del dominio de definición de una función f es menor ($<$) que δ implica que el valor absoluto de la diferencia de sus imágenes ($|f(x)-f(y)|$) es inferior a ε ($< \varepsilon$)":

A. $\forall \varepsilon > 0 \ \wedge \exists \, \delta > 0 : |x-y| < \delta \Leftrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

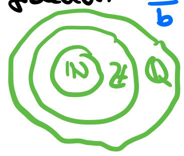
B. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

C. $\forall \delta > 0 \ \exists \, \varepsilon > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

D. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta > 0 : |x-y| < \delta \Leftrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Determinar qué conjunto números no son números racionales: $\exists x_i \in \{x_1, \ldots\} | x_i \notin \mathbb{Q}$:

$\mathbb{Q}$ = aquellos que se pueden expresar en forma de fracción $\frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$



A. $\{-\sqrt{9}, -2, -1, 1, 2, 3, \sqrt{16}\}$. $= \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \mathbb{Q}$

B. $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$. $\in \mathbb{N} \Rightarrow B \in \mathbb{Q}$

C. $\{-5, 0, {}^{1}/_{3}, 6, 3^6\}$. $= \{-5, 0, 1/3, 6, 729\} \in \mathbb{Q}$ enteros $\in \mathbb{Q}$ y $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

$3 = \frac{3}{1}$ $\quad -5 = \frac{-5}{1}$

D. $\{1, e, 3, 5, 7, 9\}$. $\notin \mathbb{Q}$

$e \simeq 2{,}718281\ldots$

$\{1, 3, 5, 7, 9\} \in \mathbb{N} \Rightarrow \in \mathbb{Q}$

$e \notin \mathbb{Q}$

En un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, el término a_{ij} representa:

el coeficiente de la 1ª ecuación que corresponde a la 2ª incógnita.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} m \text{ ecuac} \\ n \text{ incóg} \end{array}$$

$a_{ij} \rightarrow$ el coeficiente de la i-esima ecuación que corresponde a la j-esima incógnita.

A. El coeficiente de la incógnita j en la ecuación i.

B. El coeficiente de la ecuación j en la incógnita i.

C. El término independiente de la incógnita i en la ecuación j.

D. El término independiente del coeficiente i en la ecuación j.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera:

A. Los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos son incompatibles. → no está todo igualado a cero.

$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$ Sistema no homogeneo Comp $x = 1$ $y = 1$

B. Los sistemas de ecuaciones lineales determinados poseen infinitas soluciones. Tienen una única sol.

C. Los sistemas de ecuaciones lineales compatibles poseen solución única.

D. Los sistemas de ecuaciones lineales indeterminados son compatibles.

- COMPATIBLE — Tiene solución
  - DETERMINADO — Tiene 1 única sol.
  - INDETERMINADO — Tiene ∞ sol.
- INCOMPATIBLE — No tiene solución

Señala cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

A. Los elementos de los vectores unitarios son todos unitarios.

B. Los elementos de los vectores nulos son todos nulos.

C. Los vectores unitarios tienen longitud unitaria.

D. Cualquier vector no nulo puede convertirse en unitario.

un vector $\vec{u}$ unitario $\|\vec{u}\| = 1$

$\vec{u} = (1,0)$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$

Un vector $\vec{u}$ es nulo si todos los elementos son nulos. $\vec{u} = (0,0,\dots,0)$

$\vec{u} \Rightarrow \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ vector unitario

Dados los vectores $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (1,-2)$ y $\vec{c} = (4,-3)$, resolver el sistema de ecuaciones lineales definido por $\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y = \vec{c}$:

A. $x = -1 \wedge y = 2$.

B. $x = 2 \wedge y = 1$.

C. $x = 1 \wedge y = 2$.

D. $x = 1 \wedge y = -2$.

$(2,1)x + (1,-2)y = (4,-3)$

$\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x-2y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\cdot 2 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 4x+\cancel{2y}=8 \\ x-\cancel{2y}=-3 \end{array}\right\} +$

$5x = 5$

$\boxed{x=1}$

$1-2y=-3$

$-2y=-4 \Rightarrow \boxed{y=2}$

Dados los vectores $\vec{a} = (1,2,5,3)$ y $\vec{b} = (2,1,-2,x)$ determinar cuál ha de ser el valor del componente x para que ambos vectores sean ortogonales:

A. $x = -3$.

B. $x = 2$.

C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

recordemos:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1,2,5,3)\cdot(2,1,-2,x) = 1.2 + 2.1 + 5.(-2) + 3.x = 0$

$2+2-10+3x=0$

$3x = 6 \Rightarrow \boxed{x=2}$

Considerando los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del ejercicio anterior, y asumiendo que el valor del componente x del vector $\vec{b}$ es nulo, ¿cuál sería su distancia euclídea?

A. $\sqrt{52}$.

B. 8.

C. $2\sqrt{15}$.

D. $7\sqrt{2}$.

$\vec{a} = (1,2,5,3)$

$\vec{b} = (2,1,-2,0)$

$\vec{b} - \vec{a} = (2,1,-2,0) - (1,2,5,3)$

$= (1,-1,-7,-3)$

$\|\vec{b}-\vec{a}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-7)^2+(-3)^2} = \sqrt{1+1+49+9} = \sqrt{60} =$

$= \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{15}$