info@tuacademiafacil.com

1. CONCEPTO DE MATRIZ

Una matriz de orden $m\times n$ es un conjunto de números reales agrupados en m filas y n columnas

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$A_{m\times n}$ (m → filas, n → Columnas)

a_{ij} → elementos de la matriz

Ejemplo

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

2. TIPOS DE MATRIZ

Matriz fila: formada por una única fila: $B_{1\times 4}=(1,-1,2,3)$ $\quad B_{1\times n}=(a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n)$

Matriz columna: formada por única columna: $B_{4\times 1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad C_{n\times 1}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$

Matriz cuadrada: tiene el mismo número de filas que de columnas

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

$B_{n\times n}$ (filas, columnas)

Todos los términos b_{kk} forman la diagonal principal.

Matriz diagonal:
Es una matriz cuadrada donde los elementos que están fuera de la diagonal principal son 0. $\Rightarrow$ $\forall i\neq j \ \ b_{ij}=0$

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$ → diagonal principal

Matriz identidad:
Es la matriz diagonal donde su diagonal principal es 1.

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall i,j \ \ i=j \ \ b_{ij}=1\\ i\neq j \ \ b_{ij}=0\end{array}}$$

$$I_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad I_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Matriz nula: es una matriz donde todos sus elementos son nulos. $\boxed{a_{ij}=0 \ \ \forall i \wedge \forall j}$

$$O_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad O_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior: Una matriz cuadrada es triangular superior si todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son 0.

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n}\\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn}\end{pmatrix} \qquad M_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ → diagonal principal

Matriz triangular inferior: una matriz cuadrada es triangular inferior si todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son 0.

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ d_{21} & d_{22} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & & d_{nn}\end{pmatrix} \qquad N_{3\times 3}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$ → diagonal principal

Matriz traspuesta:
La matriz A^t, A' es la matriz traspuesta de A si intercambiamos filas por columnas

$$A_{n\times m} \longrightarrow A^t_{m\times n}$$

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad A^t_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

Matriz simétrica:
Una matriz cuadrada es simétrica si $\boxed{A^t=A}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -3 & -1\\ 5 & -1 & 4\end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -3 & -1\\ 5 & -1 & 4\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -3 & -1\\ 5 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta:

1) $(A^t)^t = A$
2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
3) $(\alpha . A)^t = \alpha . A^t$
4) $(A.B)^t = B^t . A^t \neq A^t . B^t$

3. OPERACIONES CON MATRICES:

$A_{n\times m} \rightarrow$ dimensión $n \times m$ (n → filas, m → columnas)

IGUALDAD: Diremos que dos matrices son iguales ; $A_{n\times m}$ y $B_{n\times m}$, y cada elemento de A es idéntico al elemento de la misma posición de B.

$a_{ij} \in A$ $\quad b_{ij} \in B$ se verifica $a_{ij} = b_{ij}$

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1,2 \wedge \forall j = 1,2,3$

SUMA: Solo se pueden sumar matrices con la misma dimensión.

$A_{n\times m} + B_{n\times m} = C_{n\times m} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i\ \ i = 1 \div n,\ \forall j\ \ j = 1 \div m$

Ejemplo:

$$\underset{2\times3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \underset{2\times3}{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma:

1) $A_{n\times m} + B_{n\times m} = C_{n\times m}$ única
2) Conmutativa: $A_{n\times m} + B_{n\times m} = B_{n\times m} + A_{n\times m}$
3) Asociativa: $A + (B+C) = (A+B) + C$
4) Elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A \quad 0 \rightarrow$ matriz nula
5) Elemento opuesto: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

$-A \rightarrow$ matriz opuesta: cambiar el signo de cada elemento de la matriz.

RESTA: Solo se pueden restar matrices si tienen la misma dimensión

$A_{n\times m} - B_{n\times m} = C_{n\times m} \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

OJO! $A - B \neq B - A$

Ejemplo:

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN $\boxed{\text{ESCALAR}}$: (número)

$A = (a_{ij})_{n\times m} \quad \alpha . A = (\alpha . a_{ij})_{n\times m}, \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Para multiplicar una matriz por un escalar, tenemos que multiplicar este escalar por cada elemento de la matriz.

$$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 3.A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\alpha . A = \begin{pmatrix} \alpha . a_{11} & \alpha . a_{12} & \cdots & \alpha . a_{1m} \\ \alpha . a_{21} & \alpha . a_{22} & \cdots & \alpha . a_{2m} \\ \vdots & & & \\ \alpha . a_{n1} & \alpha . a_{n2} & \cdots & \alpha . a_{nm} \end{pmatrix} \quad A = (a_{ij})_{n\times m}$$

Propiedades del producto de una matriz por un escalar: $\alpha \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$, $A_{n\times m}$, $B_{n\times m}$

1) $\alpha . A \rightarrow$ matriz única
2) Asociativa: $(K.\alpha).A = K.(\alpha . A)$
3) distributiva respecto escalares $(\alpha + K).A = \alpha.A + K.A$
4) distributiva respecto matrices: $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$
5) Elemento neutro: $1.A = A.1 = A$

PRODUCTO DE MATRICES:

$$\boxed{A_{n\times m} \cdot B_{m\times p} = C_{n\times p}}$$

Solo se pueden multiplicar matrices si el nº de columnas de la primera matriz: A coincide con el nº de filas de la segunda matriz: B

Como se multiplica:

$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 10 \\ 17 & -5 & 20 \end{pmatrix} = C_{2\times 3}$

$1\cdot 3 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 2$

$1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-1)$

$1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot 4$

$3\cdot 3 + 2\cdot 0 + 4\cdot 2$

$3\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 4\cdot(-1)$

$3\cdot 0 + 2\cdot 2 + 4\cdot 4$

Propiedades del producto de matrices:

1) No es conmutativa: $A\cdot B \neq B\cdot C$
2) Asociativa: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
3) Distributiva: $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
   $C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$
4) Pseudo asociativa: $(\alpha\cdot A)\cdot B = \alpha\cdot(A\cdot B)$
5) Elemento neutro: $A\cdot I = I\cdot A = A$
   matriz Identidad.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$

$\neq$

$B\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

OJO $\Rightarrow A\cdot B \neq B\cdot A$

TRAZA DE UNA MATRIZ:

→ Necesitamos que la matriz sea cuadrada.

$$\boxed{\text{Traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

$\|$

$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{mm}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$

Suma de la diagonal principal

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Traza $A = -1 + 0 + 8 = 7$

Propiedades de la traza de una matriz $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\text{Traza}(A) = \text{Traza}(A^t)$
2) $\text{Traza}(A+B) = \text{Traza}\, A + \text{Traza}\, B$
3) $\text{Traza}(A\cdot B) = \text{Traza}(B\cdot A) \rightarrow A\cdot B \neq B\cdot A$
4) $\text{Traza}(\alpha\cdot A) = \alpha\cdot \text{Traza}(A)$

Ejercicios básicos de matrices

Calcula $3AA^T - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$: $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix}$

$3\cdot A\cdot A^T - 2I = 3\cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 3\cdot \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A+B)^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T + B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

- $(3A)^T = 3A^T$

$$3 \cdot A^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow (3A)^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3A^T = (3A)^T$$

4. REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Sistema lineal m ecuac n incóg

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Escribe las ecuaciones del siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} -3x + 5y - 2z = -1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

En forma matricial: $\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$

Resolvemos el sistema:

1) Despejo una incógnita: $x = 3 + y + z$

2) Sustituir en las dos ecuaciones que no he utilizado:

$$\left.\begin{array}{l} -3(3+y+z) + 5y - 2z = -1 \\ 2(3+y+z) - y - 3z = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -9 - 3y - 3z + 5y - 2z = -1 \\ 6 + 2y + 2z - y - 3z = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2y - 5z = 8 \\ y - z = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2y - 5z = 8 \\ -2y + 2z = 8 \end{array} +$$

$$-3z = 16 \rightarrow z = -16/3$$

$$y = -4 - \frac{16}{3} = \frac{-28}{3}$$

$$x = 3 - \frac{28}{3} - \frac{16}{3}$$

Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 modelos M y 10 modelos L de butacas; 12 modelos E, 8 modelos M y 5 modelos L de mecedoras y 18 modelos E, 20 modelos M y 12 modelos L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción al cabo de un año.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Butacas} \\ \text{mecedoras} \\ \text{Sillas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & M & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} \end{array} = A \Rightarrow \text{Producción de cada mes}$$

En 1 año = 12 meses $\Rightarrow \alpha \cdot A \rightarrow 12 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & M & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{But.} \\ \text{mec.} \\ \text{Sill.} \end{array}$

En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 3 plantas y 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las viviendas L4 tienen 4 plantas y 5 ventanas pequeñas y 4 grandes y las L5 tienen 5 plantas, 6 ventanas pequeñas y 5 ventanas grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras y las grandes 4 cristales y 6 bisagras.

$$\begin{array}{c|cc} & VP & VG \\ \hline L3 & 4 & 3 \\ L4 & 5 & 4 \\ L5 & 6 & 5 \end{array} = A \qquad \begin{array}{c|cc} & C & B \\ \hline VP & 2 & 4 \\ VG & 4 & 6 \end{array} = B$$

A: relaciona tipo de viviendas con ventanas

B: relaciona tipo de viviendas con cristales y bisagras.

- Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- Calcula la matriz que expresa el número de cristales y bisagras de cada tipo de vivienda.

$$A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 2} \qquad \begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} C & B \\ \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} C & B \end{array}\begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix}\begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array}$$

nº de cristales L1

nº de bisagras L2

info@tuacademiafacil.com

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ su dimensión es:
    - A. 3x2.
    - B. 2x3.
    - C. 2x2.
    - D. 3x3.

Dimensión de una matriz: $A_{n\times m}$

nº filas — nº columnas

$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. Para que dos matrices se puedan sumar es necesario:
    - A. Que la matriz tenga coeficientes no nulos.
    - B. Que las dimensiones de las matrices sean proporcionales.
    - C. Tener la misma dimensión.
    - D. Si las matrices no tienen la misma dimensión se pueden añadir ceros para solucionarlo.

$A_{n\times m} + B_{n\times m} = C_{n\times m}$

3. Dadas dos matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcular la matriz C que representa su suma:
    - A. $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
    - B. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -15 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.
    - C. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
    - D. $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 8 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

$A_{3\times 3} + B_{3\times 3} = C_{3\times 3}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Dadas dos matrices $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & f_{13} \\ f_{21} & 5 & -3 \\ -2 & f_{32} & 1 \end{pmatrix}$, calcular qué incógnitas f_{ij} de la matriz F verifican que la suma $E = D + F$ se representa por una matriz simétrica:
    - A. $f_{13} = 3, f_{21} = -1, f_{32} = 2$.
    - B. $f_{13} = -1, f_{21} = 2, f_{32} = 3$.
    - C. $f_{13} = 1, f_{21} = -2, f_{32} = -3$.
    - D. $f_{13} = 3, f_{21} = 2, f_{32} = -1$.

matriz simétrica $\Rightarrow A = A^T$

$$D+F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & f_{13} \\ f_{21} & 5 & -3 \\ -2 & f_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2+f_{13} \\ 5+f_{21} & 3 & 1 \\ \boxed{1} & -1+f_{32} & 3 \end{pmatrix} = E$$

$$E^T = \begin{pmatrix} 3 & 5+f_{21} & 1 \\ 4 & 3 & -1+f_{32} \\ \boxed{-2+f_{13}} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$4 = 5 + f_{21} \rightarrow f_{21} = -1$

$5 + f_{21} = 4 \rightarrow f_{21} = -1$

$-1 + f_{32} = 1 \rightarrow f_{32} = 2$

$-1 + f_{32} = 1 \rightarrow f_{32} = 2$

$-2 + f_{13} = 1 \rightarrow f_{13} = 3$

$-2 + f_{13} = 1 \rightarrow f_{13} = 3$

Se: $f_{21} = -1$

$f_{32} = 2$

$f_{13} = 3$

5. Sea A una matriz de dimensión 2x3 y B una matriz de dimensión 3x4. ¿Se pueden multiplicar las matrices A y B? En caso de que se puedan multiplicar ¿cuál es la dimensión de la matriz resultante?
    - A. Si, la matriz resultante tiene dimensión 2x4.
    - B. No, porque las matrices deben tener la misma dimensión.
    - C. Si, la matriz resultante tiene dimensión 4x2.
    - D. No, porque el número de filas de columnas de la primera matriz debe ser 4.

$A_{2\times 3} \quad B_{3\times 4}$

$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 4} = C_{2\times 4}$ ($3 = 3$)

6. Para que dos matrices se puedan multiplicar es una condición necesaria:
    - A. Que tengan la misma dimensión.
    - B. Que sus dimensiones sean proporcionales.
    - C. Que coincida el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz (Sea la dimensión de la primera matriz mxn, la segunda matriz debe tener dimensión nxp.
    - D. Que coincida el número de columnas de la primera matriz y el número de filas de la segunda matriz.

$A_{n\times m} \cdot B_{m\times p} = C_{n\times p}$

nº columnas de la mat = nº filas de la 2nda mat

7. Dadas dos matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcular la matriz H que representa el producto $H = J \cdot K$:

A. $H = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 10 & -7 & 3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

B. $H = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

C. $H = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

D. $H = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

$$J.K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 10 & -7 & 3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

8. Dadas las matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ del ejercicio anterior, calcular la matriz G que representa el producto $G = K \cdot J$:

A. $G = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 10 & -7 & 3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

B. $G = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

C. $G = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

D. $G = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Recordad $K.J \neq J.K$ No conmutativa

$$K.J = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

9. Dadas las matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de los ejercicios anteriores, calcular la matriz transpuesta H' del resultado del producto $H = J \cdot K$:

A. $H' = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 10 & -7 & 3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

B. $H' = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

C. $H' = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

D. $H' = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

$$H = J.K = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 10 & -7 & 3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$H^t = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Intercambiar filas por columnas

10. Dada una matriz $L = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, calcular su traza:

A. $Traza(L) = 20$.

B. $Traza(L) = -4$.

C. $Traza(L) = 4$.

D. $Traza(L) = 0$.

Recordad: (Tiene que ser cuadrada)

Traza (A) = la suma de los elementos de su diagonal principal.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

→ diagonal principal

Traza $L = 2 + 1 + (-1) + (-2) = 0$