1. Matrices

1.1. Definición

Es el conjunto de elementos (números reales) dispuestos rectangularmente en m filas y n columnas de la siguiente forma:

FILA: 2 COLUMNA: 1

FILA: 1 COLUMNA: 1

FILA: 1 COLUMNA: 2

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \boxed{\mathcal{M}_{m\times n}^{(\mathbb{R})}}$$

DIMENSIÓN: m x n

m = Nº DE FILAS

n = Nº DE COLUMNAS

FILA: 2 COLUMNA: 2

LOCALIZADOR

donde a_{ij} es el elemento ubicado en la posición i (fila) j (columna).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

DIAGONAL PRINCIPAL: a_{ii}

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

1.2. Clasificación

Según sus dimensiones: $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

1. Fila: $1\times n$
2. Columna: $m\times 1$
3. Rectangular: $m\times n$
4. Cuadrada: $m\times m$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{1\times 4}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{4\times 1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Según los elementos que la componen:

1. Traspuesta (A^t): Cambio de filas por columnas de A $\left(A^t = a_{ji}\right)$.
2. Opuesta ($-A$): Cambio de signo de los elementos de A $\left(-A = -a_{ij}\right)$.
3. Simétrica: Cuando $A = A^t$ $\left(a_{ij} = a_{ji}\right)$.
4. Antisimétrica: Cuando $A = -A^t$ $\left(a_{ij} = -a_{ji}\right)$ (La diagonal está compuesta de ceros)
5. Nula: Todos los elementos son cero.
6. Diagonal: Matriz cuadrada con 0 en los elementos que no pertenecen a la diagonal principal $\left(a_{ij} = 0; i \neq j\right)$.
7. Identidad (I_n): Matriz diagonal con 1 en la diagonal principal $\left(a_{ii} = 1; a_{ij} = 0\right)$.
8. Triangular: Aquella con ceros debajo de la diagonal principal («superior») o encima («inferior»).

MATRICES CUADRADAS

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times2} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

a_{12}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{-1} \\ \boxed{2} & 0 & \boxed{1/2} \\ \boxed{-1} & \boxed{1/2} & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1/3 \\ 3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times3} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ TRIANGULAR SUPERIOR

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ TRIANGULAR INFERIOR

1.3.Operaciones

No existe la división de matrices, pero sí la suma, la resta y el producto: ¡¡IMPORTANTE!!

1. Suma/Resta: $A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$ Las matrices deben tener la misma dimensión.

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x4} + \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{3x4} = \begin{pmatrix} 3+8 & (-1)+10 & 0+4 & 4+(-4) \\ (-1)+3 & 0+2 & 3+1 & 1+(-3) \\ 2+5 & 5+(-5) & (-1)+8 & 0+2 \end{pmatrix}_{3x4} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3x4} - \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{3x4} = \begin{pmatrix} -5 & -11 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix}_{3x4}$$

Propiedades

- Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elemento neutro: $A + \theta = A$
- Matriz opuesta: $A+(-A) = \theta$
- Conmutativa: $A + B = B + A$

2. Producto de un escalar por una matriz: $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 3\cdot7 & 3\cdot9 & 3\cdot0 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot5 & 3\cdot2 \\ 3\cdot2 & 3(-3) & 3\cdot5 \end{pmatrix}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 21 & 27 & 0 \\ -3 & 15 & 6 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades

- Asociativa: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- Distributiva: $\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B)$

$\lambda = 2$

$\mu = 3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2 \cdot (3A) = 6A$

$6A = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$2(3A) = 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

$2(A+B) = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$2A + 2B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Producto de dos matrices: $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{\boxed{m\times p}}{C}$

COND.

DIMENSIÓN RESULT.

NO EXISTE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA:

$AB \neq BA$

$(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{2\times 3}{B} = \cancel{C}$

NO SE PUEDE

$$A \cdot B^t = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0 \\ 1\cdot 2 + 0 + 0 & 0 + 0 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Propiedades

- Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Distributiva: $A \cdot (B + C) = AB + AC$
  $(A + B) \cdot C = AC + BC$

1.4. Matriz inversa: Método de Gauss-Jordan

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden *n*, tales que su producto resulta la matriz identidad, entonces se dice que B es la inversa de A y se denota por A^{-1} (y viceversa).

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Entonces, $B = A^{-1}$, de manera que:

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \qquad A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Para calcular A^{-1} por el método de Gauss-Jordan, primero se asocia la matriz identidad (I_n) a la matriz A y después, mediante operaciones elementales de fila, se obtiene la matriz identidad donde estaba A, resultando A^{-1} donde estaba I_n.

$$(A|I_n) \xrightarrow{OEF} (I_n|A^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} F_1) \\ F_2) \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l|cc|cc} F_2) & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2F_1) & 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline F_2-2F_1) & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l|cc|cc} F_1) & 1 & 1 & 1 & 0 \\ F_2) & 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline F_1+F_2) & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

- COMPROBACIÓN: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 1-1 \\ -2+2 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Matriz inversa

Propiedades:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$
5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

1.5. Matriz traspuesta

Propiedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

1.6. Matriz identidad

Propiedad:

1. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Pregunta 1 (PEC1 · 2022/23 · Semestre 2)

Dadas las matrices A, B y C, calcular $A \cdot B^t + 2 \cdot C^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} F_1)\ 2\ 1 & 1\ 0 \\ F_2)\ 0\ 1 & 0\ 1 \\ \hline F_1 - F_2)\ 2\ 0 & 1\ -1 \end{array}$$

1º $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

2º $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3º $AB^t + 2C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Pregunta 1 (PEC1 · 2022/23 · Semestre 1)

Dadas las matrices A, B y C, calcular $2 \cdot A \cdot B^t + C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$