mxm

DIMENSIÓN mxm
ORDEN m
ORDEN 2: 2x2
ORDEN 3: 3x3

2. Determinantes

2.1. Definición

Los determinantes son el valor escalar resultante de multiplicar los elementos de las diagonales de una matriz cuadrada.

1. Segundo orden
   Producto de los elementos de la diagonal principal menos el de la secundaria.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22}} - \boxed{a_{21}a_{12}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 2 = 3 - 4 = -1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 - 0\cdot 1 = -2 - 0 = -2$$

2. Tercer orden
   Regla de Sarrus: suma de los productos de los elementos de las diagonales descendentes menos la suma de los productos de los elementos de las ascendentes.

$$|A| = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} = \boxed{a_{11}a_{22}a_{33}} + \boxed{a_{21}a_{32}a_{13}} + \boxed{a_{31}a_{12}a_{23}} - \boxed{a_{13}a_{22}a_{31}} - \boxed{a_{23}a_{32}a_{11}} - \boxed{a_{33}a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{array}{|ccc|} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{array} = (-2 + 0 + 2) - (1 + 0 + 16) =$$

$$= 0 - 17 = -17$$

3. Mayor de tercer orden

El adjunto de un elemento a_{ij} es el producto de $(-1)^{1+j}$ por el determinante de la matriz resultante de eliminar la fila i y la columna j. Aunque también sirve para determinantes de orden uno, dos y tres, calcular el determinante por adjuntos consiste en sumar los adjuntos de cada elemento de una línea (fila o columna).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{14}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(2 - 1) + 2 \cdot (-1 - 8) = 1 + (-18) = -17$$

2.2.Propiedades

1. Si se multiplica una línea (fila o columna) por un número real, entonces el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3|A| = 3 \cdot 2 = 6$$

2. El determinante de un producto es igual al producto de sus determinantes.

$$|AB| = |A||B|$$

3. Un determinante se puede descomponer en suma de dos o más determinantes del mismo orden. El desarrollo se hace sobre una línea (fila o columna).

$$|A| = \begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

4. Si se permutan dos líneas (filas o columnas) entre sí, el determinante cambia de signo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

5. Si tiene una línea (filas o columnas) de ceros, el determinante es cero.
6. Si tiene dos líneas (filas o columnas) iguales, el determinante es cero.
7. Si tiene dos líneas (filas o columnas) proporcionales, el determinante es cero.
8. Si una línea (fila o columna) es combinación lineal de otra, el valor del determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{debido a que} \quad F_3 = 2F_1 + C_2$$

9. Si a los elementos de una línea (fila o columna) se les suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 16 \quad \rightarrow \quad C_3' = 2C_1 + C_2 + C_3 \quad \rightarrow \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 16$$

2.3. Matriz inversa: Método del determinante

Se recomienda calcularla a través del determinante para realizar menos operaciones que por el método de Gauss:

ESCALAR · MATRIZ

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A^t)}{|A|} = \frac{[\mathrm{adj}(A)]^t}{|A|} = \boxed{\frac{1}{|A|}} \cdot \mathrm{adj}(A^t)$$

$|A| \neq 0$

donde

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$(-1)^{1+1}$ $\quad$ $(-1)^{1+2}$

$$\mathrm{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot 1 = -1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -2 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2.4. Rango

Es el número de filas independientes, es decir, que no son combinación lineal de las otras. Se puede calcular mediante determinantes menores, pero se recomienda el método de Gauss.

1. Menores

   Se denomina «menor de orden p» de una matriz a los determinantes de las submatrices de orden p. Por tanto, el rango de una matriz es la máxima dimensión p del menor no nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2×3 → $R(A) = 2$ o $R(A) = 1$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$R(A) = 2$ $\qquad$ $R(A) = 2$ $\qquad$ $R(A) = 2$

2. Gauss

   Mediante operaciones elementales de fila se hacen ceros debajo de la diagonal principal («triangular superior»). El rango será el número de filas que no estén compuestas en su totalidad por ceros. En caso de que la primera columna sea totalmente de ceros, entonces la diagonal principal se desplaza una posición hacia la derecha.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad R(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R(A) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R(A) = 3$$

Para discutir el rango de una matriz a partir de un parámetro k, se procede de la siguiente manera:

- Paso 1. Se calcula el determinante en función de k y se iguala a cero para calcular los diferentes valores de k que anulan dicho determinante. Cuando k es distinto a esos valores, el rango es máximo y su valor es igual al orden de la matriz.
- Paso 2. Se sustituye k para cada uno de los valores y se calculan los rangos correspondientes mediante el método de Gauss.
- Paso 3. Se hace un resumen donde aparezcan los rangos de la matriz en función de los diferentes valores de k.

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 2-k & 2 & 2-k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3x3

1º

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-K & -1 & 1 \\ 2-K & 2 & 2-K \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-K & -1 & 1 \\ 2-K & 2 & 2-K \end{matrix} = [0 + (-2+K) + 0] - [0 - (2-K)(1-K) + 0] =$$

$$= -2+K+(2-K)(1-K) =$$

$$= -2+K+(2-2K-K+K^2) =$$

$$= -2+K+2-3K+K^2 =$$

$$= K^2-2K = 0$$

$$\underbrace{K}_{1^{er}}\underbrace{(K-2)}_{2^{o}} = 0$$

$\boxed{K_1 = 0}$

$K-2=0$

$\boxed{K_2 = 2}$

NOTA: Cuando $K \neq 0$ y $K \neq 2$, entonces $R(A) = 3$

2º Para $K=0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{R(A)=2}$

3º Para $K=2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_3+F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{R(A) = 2}$

4º RESUMEN:

- Si $K \neq 0$ y $K \neq 2$, $R(A) = 3$
- Si $K = 0$ ó $K = 2$, $R(A) = 2$

Pregunta 1 (PEC1 · 2022/23 · Semestre 2)

Dadas las matrices A, B y C, calcular $A \cdot B^t + 2 \cdot C^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1º $$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 1 \quad 0} \\ 1 \quad 0 \quad -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2º $$\boxed{C^{-1} = \frac{1}{|C|} \operatorname{adj}(C^t)}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(C^t) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -0 & +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3º $$AB^t + 2C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{5} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 (PEC1 · 2022/23 · Semestre 1)

Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1º

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-K \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-K & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1+0+0+(1-K)^2-0-0 =$$

$$= -1+(1-2K+K^2) = 0$$

$$K^2-2K=0$$

$$K(K-2)=0 \quad \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = 2 \end{cases}$$

2º Para $K=0$:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1-0 = -1 \neq 0$$

$$R(A) = 2$$

3º Para $K=2$:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1-0 = -1 \neq 0$$

$$R(A) = 2$$

4º RESUMEN:

- Si $K \neq 0$ y $K \neq 2$, $R(A) = 3$
- Si $K = 0$ o $K = 2$, $R(A) = 2$

Pregunta 3 (PEC1 · 2022/23 · Semestre 1)

Comprobar que, si en la matriz A de la pregunta 2 tomamos $k = -1$, entonces la matriz A es invertible y calcular su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-k & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A^t)}{|A|}$$

1º $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -1 \neq 0$ por tanto, A es invertible

2º $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$adj(A^t) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$