1. Matrices

1.1. Definición

Es el conjunto de elementos (números reales) dispuestos rectangularmente en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}^{(\mathbb{R})}$$

donde a_{ij} es el elemento ubicado en la posición i (fila) j (columna).

1.2. Clasificación

Según sus dimensiones:

1. Fila: $1\times n$
2. Columna: $m\times 1$
3. Rectangular: $m\times n$
4. Cuadrada: $m\times m$

Según los elementos que la componen:

1. Traspuesta (A^t): Cambio de filas por columnas de A $\left(A^t = a_{ji}\right)$.
2. Opuesta (–A): Cambio de signo de los elementos de A $\left(-A = -a_{ij}\right)$.
3. Simétrica: Cuando $A = A^t$ $\left(a_{ij} = a_{ji}\right)$.
4. Antisimétrica: Cuando $A = -A^t$ $\left(a_{ij} = -a_{ji}\right)$ (La diagonal está compuesta de ceros)
5. Nula: Todos los elementos son cero.
6. Diagonal Matriz cuadrada con 0 en los elementos que no pertenecen a la diagonal principal $\left(a_{ij} = 0; i \neq j\right)$.
7. Identidad (I_n): Matriz diagonal con 1 en la diagonal principal $\left(a_{ii} = 1; a_{ij} = 0\right)$.
8. Triangular: Aquella con ceros debajo de la diagonal principal («superior») o encima («inferior»).

1.3. Operaciones

No existe la división de matrices, pero sí la suma, la resta y el producto:

1. Suma/Resta: $A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 8 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 8 & 2 \end{pmatrix} =$$

Propiedades

- Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elemento neutro: $A + \theta = A$
- Matriz opuesta: $A + (-A) = \theta$
- Conmutativa: $A + B = B + A$

2. Producto de un escalar por una matriz: $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

Propiedades

- Asociativa: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- Distributiva: $\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B)$

2. Producto de dos matrices: $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B^t =$

Propiedades

- Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Distributiva: $A \cdot (B + C) = AB + AC$
  $(A + B) \cdot C = AC + BC$

1.4. Matriz inversa: Método de Gauss-Jordan

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden *n*, tales que su producto resulta la matriz identidad, entonces se dice que B es la inversa de A y se denota por A^{-1} (y viceversa).

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Entonces, $B = A^{-1}$, de manera que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Para calcular A^{-1} por el método de Gauss-Jordan, primero se asocia la matriz identidad (I_n) a la matriz A y después, mediante operaciones elementales de fila, se obtiene la matriz identidad donde estaba A, resultando A^{-1} donde estaba I_n.

$$(A|I_n) \longrightarrow (I_n|A^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Matriz inversa

Propiedades:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$
5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

1.5. Matriz traspuesta

Propiedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

1.6. Matriz identidad

Propiedad:

1. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Pregunta 1 (PEC1 · 2022/23 · Semestre 2)

Dadas las matrices A, B y C, calcular $A \cdot B^t + 2 \cdot C^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 1 (PEC1 · 2022/23 · Semestre 1)

Dadas las matrices A, B y C, calcular $2 \cdot A \cdot B^t + C^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$